Numerik von Differentialgleichungen - Blatt 11, für den 12. 6. 2012

46. **(instationäre Transportgleichung mit FVM)** Betrachten Sie die instationäre Transportgleichung in $\Omega \times (0,T) \subset \mathbb{R}^{d+1}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \operatorname{div}(b(x)u(x,t)) &= f(x,t) && \forall x \in \Omega, \forall t \in (0,T)\\
u(x,0) &= u_0(x) && \forall x \in \Omega\\
u(x,t) &= u_g(x,t) && \forall x \in \Gamma_{in}, t \in (0,T)
\end{aligned}$$

Leiten Sie die Gleichung aus der Massenbilanz her.

$$\text{Massenänderung} \ = \ \text{Quelle} \ - \ \text{Abfluss über Rand}$$

Die instationäre Transportgleichung in $\mathbb{R}^d$ kann als stationäre Transportgleichung in $\mathbb{R}^{d+1}$ interpretiert werden

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}_{(x,t)}(\tilde{b}(x,t)u(x,t)) &= f(x,t) && \forall (x,t) \in Q := \Omega \times (0,T)\\
u(x,t) &= u_g(x,t) && \forall (x,t) \in \Gamma_{in}^Q.
\end{aligned}$$

Wie sieht $\tilde{b} \in \mathbb{R}^{d+1}$ aus? Was ist $\Gamma_{in}^Q \subset \partial Q$?.

47. Sei $\Omega = (0,1)$, $T = 1$ und $b(x) > 0$ für $x \in \Omega$. Stellen Sie eine Finite-Volumen-Diskretisierung für die instationäre Transportgleichung auf. Nutzen Sie dazu die Interpretation als 2-dimensionale stationäre Transportgleichung. Implementieren Sie die FVM für die instationäre Transportgleichung in 1D. Dabei sollen immer nur die Werte zum aktuellen Zeitschritt gespeichert werden. Testen Sie für $u_0 = \chi_{[0.3,0.4)}$, $b = 1$, $h = 0.01$ und $f = 0$. Wie sieht $u(x,0.1)$, $u(x,0.5)$ und $u(x,1)$ aus?

48. Betrachten Sie auf $\Omega = (0,1)^2$ die Konvektions-Diffusionsgleichung

$$-\varepsilon\Delta u + \operatorname{div}(bu) = f \qquad \text{in } \Omega$$

mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Es sei $b = (b_x, b_y)$ mit $b_x > 0$, $b_y > 0$, und $\varepsilon > 0$. Die Gleichung wird mit der FDM mit Upwind diskretisiert. Zeigen Sie analog zum Skript die Stabilitätsabschätzung in der max-Norm:

$$\|u_h\|_{l_\infty} \leq \frac{2}{\|b\|_2}\|f_h\|_{l_\infty}$$

Hinweis: Wählen Sie die Vergleichsfunktion $u_h^1(x,y) = b_x x + b_y y$.