

Numerik von Differentialgleichungen - Blatt 12, für den 20. 6. 2012

49. Das Vorwärts - Rückwärts Gauß-Seidel Verfahren ist die Verbindung eines GS - Schrittes mit einem zweiten Schritt in umgekehrter Reihenfolge. Für die aktuelle Näherung $x^k \in \mathbb{R}^n$ wird x^{k+1} wie folgt berechnet:

$$x_i^{k+1/2} = x_i^k + \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{k+1/2} - \sum_{j=i}^n a_{i,j} x_j^k \right) \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_i^{k+1} = x_i^{k+1/2} + \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} x_j^{k+1} - \sum_{j=1}^i a_{i,j} x_j^{k+1/2} \right) \quad i = n, \dots, 1$$

Stellen Sie diesen Gesamt-Schritt als Richardsoniteration

$$x^{k+1} = x^k + C^{-1}(b - Ax^k)$$

dar. Wie sieht C aus ? Verwenden Sie dazu die Aufspaltung $A = L + D + R$ analog zur Vorlesung. Zeigen Sie dass für symmetrisches A auch C symmetrisch ist.

50. Die Chebyshev Polynome sind definiert als

$$T_m(x) = \begin{cases} \cos(m \arccos(x)) & |x| \leq 1, \\ \cosh(m \operatorname{arcosh}(x)) & |x| > 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie dass sie die 3-Term Rekurrenz

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_{m+1}(x) &= 2xT_m(x) - T_{m-1}(x) \end{aligned}$$

erfüllen. Zeigen Sie weiters dass für $|x| \geq 1$ die T_m auch

$$T_m(x) = \frac{1}{2} \left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^m + (x - \sqrt{x^2 - 1})^{-m} \right]$$

erfüllen. Plotten Sie $T_1 \dots T_{10}$ auf dem Intervall $[-2, 2]$.

51. Zeigen Sie dass für $0 < a < b$ gilt

$$\min_{\substack{p \in \Pi^n \\ p(0)=1}} \max_{\lambda \in [a,b]} |p(\lambda)| \leq \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b} + \sqrt{a}},$$

wobei Π^n der Raum der Polynome bis zum Grad n ist. Daraus ergibt sich die Konvergenzratenabschätzung des CG - Verfahrens mit $\sigma(A) \subset [a, b]$.

Hinweis: Wählen Sie als Kandidaten

$$q(x) = \frac{T_n\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)}{T_n\left(\frac{-a-b}{b-a}\right)}.$$

Plotten Sie q für $a = 0.01, b = 1, n = 10$.