Serie 1

Besprechnung am Di.,

1.1. **a)** Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$. Die Funktion f erfülle eine *einseitige Lipschitzbedingung* mit Lipschitzkonstante $L \in \mathbb{R}$, d.h.

$$\langle f(t,y) - f(t,z), y - z\rangle_2 \leq L\langle y - z, y - z\rangle_2 \qquad \forall (t,y), (t,z) \in G.$$

Zeigen Sie folgende Aussage über die stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten: Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $[t_0, T] \subset J$ und seien y, $z \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ Lösung der Differentialgleichung, d.h.

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad \text{und} \qquad z'(t) = f(t, z(t)) \qquad \forall t \in J.$$

Dann gilt für alle $t \in [t_0, T]$:

$$\|y(t) - z(t)\|_2 \leq \|y(t_0) - z(t_0)\|_2 e^{L(t-t_0)}.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $m(t) = \|y(t)-z(t)\|_2^2$; studieren Sie den Beweis des Gronwall-Lemmas.

b) Schließen Sie, daß für Funktionen f, die eine einseitige Lipschitzbedingung erfüllen, die Fortsetzung nach rechts eindeutig ist.

c) Die Wahl des euklidischen Skalarproduktes in a) ist nicht zwingend. Welches Skalarprodukt würden Sie wählen, wenn Sie das AWP

$$\mathbf{M}y'(t) + \mathbf{A}y(t) = \mathbf{g}(t), \qquad y(t_0) = y_0$$

für SPD-Matrizen $\mathbf{M}$, $\mathbf{A}$ betrachten?

1.2. Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \lambda(y(t) - g(t)) + g'(t), \qquad y(0) = g(0) + \delta, \tag{1}$$

wobei $g \in C^1(\mathbb{R})$ beschränkt und $\delta \in \mathbb{R}$ sei.

a) Lösen Sie (1).

b) Diskutieren Sie die Wirkung der Störung δ für die drei Fälle $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ und $\lambda > 0$.

c) Visualisieren Sie die Lösung für $\delta = 0$ und $\delta = 10^{-2}$ mit $g(t) = \arctan t$ bzw. $g(t) = e^{-t^2}$.

1.3. (zur Stabilität von ODEs) Das Prinzip der "linearisierten Stabilität" ist für *autonome* ODEs formuliert. Für nichtautonome ODEs funktioniert es nicht unbedingt, wie z.B. das folgende Bsp zeigt:

$$y' = A(t)y, \qquad A(t) = \begin{pmatrix} -1/4 + 3/4\cos 2t & 1 - 3/4\sin 2t \\ -1 - 3/4\sin 2t & -1/4 - 3/4\cos 2t \end{pmatrix}$$

welches die Eigenwerte $1/4(-1 \pm \mathbf{i}\sqrt{7})$ hat, aber $y \equiv 0$ nicht stabil ist. Wir zeigen nun, daß für manche Fälle trotzdem Stabilität gezeigt werden kann.

Es möge die matrixwertige Funktion $A(t)$ folgende beiden Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} A_{ii}(t) &< 0 \qquad \forall t \in [0,\infty) \\ \sum_{j\neq i} |A_{ij}(t)| &\leq (1-\delta)|A_{ii}(t)| \qquad \forall t \in [0,\infty) \end{aligned}$$

für ein $\delta > 0$. Zeigen Sie: für das AWP $y' = A(t)y$ mit $y(0) = y_0$ gilt: $\sup_{t>0} \|y(t)\|_\infty \leq \delta^{-1}\|y_0\|_\infty$. Gehen Sie wie folgt vor:

a) Schreiben Sie $A = D(\mathrm{Id} + B)$, wobei die Diagonalmatrix D gegeben ist durch $D = \mathrm{diag}(A_{11}, \ldots, A_{dd})$. Überlegen Sie sich, daß $\|B(t)\|_\infty \leq 1 - \delta$

b) Geben Sie die Fundamentallösung $Y(t)$ der ODE

$$y' = Dy$$

an, and zeigen Sie die Darstellung

$$y(t) = Y(t)\left[y_0 + \int_0^t Y(s)^{-1} D(s)B(s)y(s)\,ds\right].$$

c) Überlegen Sie sich, daß

$$\sup_{t>0}\left\|\int_0^t Y(t)Y(s)^{-1}D(s)\,ds\right\|_\infty \leq 1$$

und schließen Sie

$$\sup_{t>0}\|y(t)\|_\infty \leq \frac{1}{\delta}\|y_0\|_\infty$$

1.4. **a)** Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $K : X \to X$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, daß es eine Folge $(\theta_n)_{n=0}^\infty$ mit $\sum_{n=0}^\infty \theta_n < \infty$ gibt mit

$$\|K^n x - K^n y\| \leq \theta_n \|x - y\| \qquad \forall x, y \in X$$

Zeigen Sie: K hat einen eindeutigen Fixpunkt x^*. Zudem gilt $\|x^* - K^n x_0\| \leq \sum_{j=n}^\infty \theta_j \|Kx_0 - x_0\|$

b) (Variante von Picard-Lindelöf) Sei $R = [t_0, t_0 + a] \times \mathbb{R}^n$ und $f \in C(R; \mathbb{R}^n)$. Seien weiters die Funktion L und L_1 definiert durch

$$L(t) := \sup_{x\neq y}\frac{\|f(t,x) - f(t,y)\|_{\mathbb{R}^n}}{\|x - y\|_{\mathbb{R}^n}}, \qquad L_1(t) := \int_{t_0}^t L(\tau)\,d\tau.$$

Sei $X = C([t_0, t_0 + a]; \mathbb{R}^n)$ und nehmen Sie an, daß L_1 auf $[t_0, t_0 + a]$ beschränkt ist. Zeigen Sie mittels Induktion, daß der Operator $K : X \to X$ gegeben durch

$$(Ky)(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))\,ds$$

folgende Abschätzung für alle y, $\hat{y} \in X$ und $m \in \mathbb{N}_0$ erfüllt:

$$\|K^m y(t) - K^m \hat{y}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{L_1(t)^m}{m!}\sup_{t_0\leq s\leq t}\|y(s) - \hat{y}(s)\|_{\mathbb{R}^n} \qquad \forall t \in [t_0, t_0 + a].$$

c) Zeigen Sie, daß unter den obigen Voraussetzungen an f und L_1 die Integralgleichung

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))\,ds \qquad \forall t \in [t_0, t_0 + a]$$

eine eindeutige Lösung hat.