Serie 2

Besprechnung am Di., 19.3.13

2.1. Für hinreichend glatte Funktionen f bezeichnet $t \mapsto y_{t_0,y_0}(t)$ die (eindeutige) Lösung des AWPs

$$y' = f(t,y), \qquad y(t_0) = y_0. \tag{1}$$

Ziel der Aufgabe ist, die stetige Differenzierbarkeit der Funktion $y_0 \mapsto y_{t_0,y_0}(t)$ zu zeigen.
Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $f \in C^2(G,\mathbb{R})$. Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $t_0 \in J$ und $y_{t_0,y_0} \in C^1(J,\mathbb{R})$ die Lösung des AWP (1). Definieren Sie die Funktion R als Lösung des *linearen* AWPs

$$R'(t) = \partial_y f(t, y_{t_0,y_0}(t))\, R(t), \qquad R(t_0) = 1. \tag{2}$$

Zeigen Sie mit Satz 1.5 des Vorlesungsskriptes, daß für $\Delta_h(t) = \frac{1}{h}\left(y_{t_0,y_0+h}(t) - y_{t_0,y_0}(t)\right)$ gilt:

$$\lim_{h\to 0} \Delta_h(t) = R(t), \qquad t \in J.$$

Schließen Sie, daß $R(t) = \frac{\partial}{\partial y_0} y_{t_0,y_0}(t)$.
Hinweis: Setzen Sie $\delta(t) := \Delta_h(t) - R(t)$ und versuchen Sie, für δ eine Differentialgleichung der Form $\delta'(t) = \partial_y f(t, y_{t_0,y_0}(t))\delta(t) + z(t,h)$ zu finden. Kontrollieren Sie z mittels Satz 1.5 des Vorlesungsskriptes.

2.2. Zeigen Sie das *diskrete Gronwall-Lemma*: Seien $(e_i)_{i=0}^N$, $(\eta_i)_{i=0}^N$, $(\delta_i)_{i=0}^N$ drei Folgen mit nicht-negativen Elementen, die

$$e_{i+1} \le (1+\delta_i)e_i + \eta_i, \qquad i = 0,\dots,N-1$$

erfüllen. Dann ist

$$|e_i| \le \left(e_0 + \sum_{j=0}^{i-1} \eta_j\right) e^{\sum_{j=0}^{i-1}\delta_j} \qquad i = 0,1,\dots,N. \qquad \text{(Konvention: leere Summe = 0)}$$

2.3. Zur numerischen Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(t,y) \text{ in } [a,b], \qquad y(a) = y_0$$

wird ein explizites Einschrittverfahren verwendet gemäß der Rekursion

$$y_{\nu+1} = y_\nu + h_\nu \Phi(t_\nu, y_\nu, h_\nu) \text{ für } \nu = 0,1,2,...N-1.$$

Weiters sei $\tilde{y}_\nu$ eine Folge, die dadurch entsteht, daß in jedem Schritt eine Störung gemacht wird (z.B. durch Rundungsfehler):

$$\tilde{y}_{\nu+1} = \tilde{y}_\nu + h_\nu \Phi(t_\nu, \tilde{y}_\nu, h_\nu) + \varepsilon_\nu.$$

Nehmen Sie an, daß die Störungen ε_ν die Abschätzung $|\varepsilon_\nu| \le \varepsilon$ für alle ν erfüllen. Zeigen Sie: Ist die Inkrementfunktion $\Phi(t,y,h)$ Lipschitz-stetig in y mit Lipschitzkonstante $L > 0$, so gilt

$$|y_\nu - \tilde{y}_\nu| \le (|y_0 - \tilde{y}_0| + \nu\varepsilon)\exp(L|t_\nu - t_0|), \qquad \nu = 0,\dots,N.$$

2.4. (**Programmieraufgabe 2.4**)
Das implizite Eulerverfahren ist durch $y_\nu = y_{\nu-1} + hf(t_\nu, y_\nu)$ definiert. Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
[t,y] = ieuler(a,b,N,y0,M,g)
```

die das implizite Eulerverfahren realisiert für die Differentialgleichung

$$y' = M(t)y + g(t), \qquad y(a) = y0$$

auf dem Intervall $[a,b]$. Hier kann $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ vektorwertig sein und M eine matrixwertige Funktion. $N \in \mathbb{N}$ ist die Anzahl Schritte (d.h. $h = (b-a)/N$). Neben den Daten a, b, N und y_0 sollen auch die

Function-Handles der Funktionen `M=M(t)` und `g=g(t)` übergeben werden. Die übergebenen Funktionen können dann beispielsweise mit `feval(M,t)` aus der Funktion `ieuler` heraus aufgerufen werden. Als Rückgabeparameter liefere die Funktion `ieuler` den Stützstellenvektor $t \in \mathbb{R}^{N+1}$ und die Matrix der dazugehörigen Funktionswerte $y \in \mathbb{R}^{n\times(N+1)}$, d.h. die $\nu+1$-te Spalte von y entspricht der Approximation y_ν an der Stelle t_ν. Vergleichen Sie die Fehler $|y(1)-y_N(1)|$ für explizites und implizites Eulerverfahren im (doppelt logarithmischen) Plot über $N = 2^i$, $i = 1, \ldots, 10$. Als Beispiel nehmen Sie das Modellproblem

$$y' = \lambda y \text{ auf } [0,1], \qquad y(0) = 1$$

mit exakter Lösung $y(t) = \exp(\lambda t)$ für verschiedene konstante Werte von $\lambda \in \{\pm 1, \pm 10\}$. Was beobachten Sie?

2.5. Die Bestimmungsgleichungen für RK-Verfahren hoher Ordnung sind kompliziert zu lösen. Zur Konstruktion von Verfahren kann man deshalb "simplifying assumptions" machen. Eine Idee ist, die Koeffizienten c_i und b_i durch eine Quadraturformel festzulegen (wie in der VO gemacht). Eine weitere ist, zusätzliche Forderungen zu stellen, z.B. daß das Verfahren invariant unter Autonomisierung ist. Zeigen Sie, daß dies auf die Bedingung

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$$

führt.

Hinweis: Das AWP $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$ wird autonomisiert, indem man das System

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\tau, y) \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y \\ \tau \end{pmatrix}(t_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ t_0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

betrachtet. Die Forderung nach "Invarianz unter Autonomisierung" bedeutet dann, daß die Anwendung des RK-Verfahrens auf $y' = f(t,y)$ und auf das autonomisierte System (3) die gleiche y-Komponente liefert.