Serie 3

Besprechung am Di., 9.4.13

3.1. Sei $\Delta = \{t_i \,|\, i = 0, \ldots, N\}$ ein Gitter auf $[t_0, T]$ und seien y_i, $i = 0, \ldots, N$ die Approximationen an die Lösung $y(t_i)$, wobei y das AWP $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ löst. Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ und $h = \max_i h_i$. Die Approximationen y_i sollen zu einer Funktion $\tilde{y}$ zwischen den Knoten t_i ergänzt werden.

a) Die Funktion $\tilde{y}$ wird als der stückweise lineare Interpolant der Approximationen gewählt, d.h. $\tilde{y} \in S^1(\Delta)$ mit den Bedingungen $\tilde{y}(t_i) = y_i$. Zeigen Sie: falls $\max_i |y(t_i) - y_i| \le Ch$, dann gilt für ein geeignetes $C' > 0$

$$\|\tilde{y} - y\|_{C([t_0,T])} \le C'h.$$

b) Bessere Approximationen als in Teilaufg. a) ergeben sich durch Interpolation mit Polynomen höherer Ordnung. Definieren Sie hierzu auf (t_i, t_{i+1}) die Funktion $\tilde{y}|_{(t_i,t_{i+1})}$ durch Hermiteinterpolation als das Polynom 3. Grades, für welches gilt

$$\tilde{y}(t_i) = y_i, \quad \tilde{y}(t_{i+1}) = y_{i+1}, \quad \tilde{y}'(t_i) = f(t_i, y_i), \quad \tilde{y}'(t_{i+1}) = f(t_{i+1}, y_{i+1}),$$

Wenn Sie ein Verfahren der Ordnung p verwenden, d.h. $\max_{i=0,\ldots,N} |y(t_i) - y_i| \le Ch^p$, welche Genauigkeit erwarten Sie dann für $\max_{t\in[t_0,t_N]} |y(t) - \tilde{y}(t)|$?

3.2. (**Programmieraufgabe 3.2**)

a) Man implementiere das explizite Runge-Kutta Verfahren der Ordnung 4 in einer MATLAB-Funktion

$$\texttt{y} = \texttt{rk4(f, y0, t)}$$

der als Eingabeparameter das Funktionshandle der rechten Seite `fty`=f(t,y), der Anfangswert y_0 sowie der Vektor der Stützstellen $t = (t_0, t_1, ..., t_N)$ übergeben werde. Dabei darf die unbekannte Lösung auch vektorwertig sein, dh. $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ist ein Spaltenvektor.

b) Schreiben Sie ein Matlab-Programm

$$[p1, p2] = \texttt{ordnungrk4}(nmax)$$

welches die Konvergenzordnung des RK4-Verfahrens auf zwei Arten für das Modellproblem $y' = y$ und $t_0 = 0$, $y_0 = 1$, $T = 1$ schätzt. Das RK4-Verfahren soll die Schrittweiten $h = 2^{-n}$, $n = 0, 1, \ldots$ verwenden. Die Anzahl Schritte N ist durch T/h gegeben.

1. 1. Art (Bestimmung von p1): Fitten Sie tatsächlichen Fehler $\varepsilon(h) := |y(T) - y_N|$ an ein Gesetz der Form $\varepsilon(h) = Ch^p$, wobei Sie die Daten für $h = 2^{-n}$, $n \in \{n_{max} - 2, n_{max} - 1, n_{max}\}$ verwenden. *Hinweise:* Das Gesetz ist äquivalent zu $\log \varepsilon(h) = \log C + p \log h$; `help polyfit`.
2. 2. Art (Bestimmung von p2): Betrachten Sie den geschätzten Fehler $\widetilde{\varepsilon}(h) := |y_{2N} - y_N|$, der sich aus den Approximationen zu den Schrittweiten h und $h/2$ ergibt. Fitten Sie wie bei der 1. Art die geschätzten Fehler $\widetilde{\varepsilon}(h)$ an ein Gesetz der Form $\widetilde{\varepsilon}(h) = Ch^p$ mittels der Werte $h = 2^{-n}$, $n \in \{n_{max} - 3, n_{max} - 2, n_{max} - 1\}$.

c) Welche Konvergenzraten $p1$, $p2$ beobachten Sie für die Wahl $nmax = 10$? Erklären Sie, warum die beiden beobachteten Konvergenzraten $p1$ und $p2$ so nah beieinander sind. (vgl. auch folgende Aufgabe)

3.3. Der Konvergenzsatz zeigt eigentlich nur $|y(T) - y_N| \le Ch^p$. Tatsächlich beobachtet man oft ein "regelmäßigeres" Konvergenzverhalten bei konstanter Schrittweite h von der Art

$$y(T) - y_N = ch^\alpha + O(h^{\alpha+1})$$

für Konstanten c, α, die von der Lösung und dem Verfahren abhängen. Wir rechnen dies hier für das einfache Problem $y' = y$, $y(0) = y_0$, $T = 1$ nach.

a) Betrachten Sie das explizite Eulerfahren. Dann ist ein Schritt $y_1 = (1 + h)y_0$ und damit $y_N = (1 + h)^N y_0$. Zeigen Sie

$$e^1 y_0 - y_N = \frac{e}{2} h y_0 + O(h^2)$$

Hinweis: Logarithmieren Sie $(1 + h)^N$ und verwenden Sie die Taylorreihe $\ln(1 + x) = x - x^2/2 + O(x^3)$ für $x \to 0$.

b) Zeigen Sie die analoge Aussage für das RK4-Verfahren. Hier ist (warum?) $y_1 = R(h)y_0$ mit

$$R(h) = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} = e^h - \delta(h)$$

mit $\delta(h) = \frac{h^5}{5!} + O(h^6)$.

3.4. Gegeben sei das AWP

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sin t \\ 2(\cos t - \sin t) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit exakter Lösung $y_1(t) = 2e^{-t} + \sin t$, $y_2(t) = 2e^{-t} + \cos t$. Es soll der Fehler $e(h) := \|y(T) - y_N\|_2$ für $T = 1$ als Funktion der Schrittweite h (verwenden Sie uniforme Gitter) doppelt logarithmisch darstellt werden. Vergleichen Sie das RK4-Verfahren mit dem expliziten Eulerverfahren für die Fälle $h = 2^{-n}$, $n = 1, \ldots, 20$ bei Verwendung von *doppelt genauer* Arithmetik und *einfacher Genauigkeit*. *Hinweis:* `help single` in MATLAB. Erklären Sie Ihre Beobachtungen (*Hinweis:* Aufg. 2.3).

3.5. Sei die Inkrementfunktion Φ definiert durch

$$\Phi(t, y, h) = \frac{1}{4}(k_1 + 3k_3),$$
$$k_1 = f(t, y), \qquad k_2 = f(t + \tfrac{1}{3}h, y + \tfrac{1}{3}hk_1), \qquad k_3 = f(t + \tfrac{2}{3}h, y + \tfrac{2}{3}hk_2).$$

a) Geben Sie das Butcherschema für das durch Φ beschriebene RK-Verfahren an.

b) Das durch Φ beschriebene RK-Verfahren ist ein Verfahren der Ordnung $p = 3$. Zeigen Sie, daß es mindestens Ordnung $p = 2$ hat. Was müßte man zeigen, um auch noch Ordnung $p = 3$ zu zeigen? *Hinweis:* Für den Zweck dieser Übung reicht es zu zeigen, daß $|\tau(t_0, y_0, h)| \leq C(t_0, y_0)h^{p+1}$ für hinreichend kleine h und eine Konstante $C(t_0, y_0)$, die noch von (t_0, y_0) und f abhängen darf.

3.6. **a)** Für ein explizites Runge-Kutta-Verfahren der Konsistenzordnung $p + 1 \in \mathbb{N}$ und jedes Polynom $q \in \mathcal{P}_p$ sowie festes $t \in \mathbb{R}$ gilt $\int_t^{t+h} q(x)\,dx = h\Phi(t, q(t), h)$, d.h. das Runge-Kutta-Verfahren induziert eine Quadraturformel vom Exaktheitsgrad p.

b) Welche Quadraturformel wird durch das explizite Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 4 aus der Vorlesung induziert? Welche Quadraturformel wird durch das modifizierte Euler-Verfahren und das Verfahren von Heun, welche durch die folgenden Butcherschemata beschrieben werden:

$$\text{modifizierter Euler: } \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \qquad\qquad \text{Heun: } \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$