Serie 4

Besprechnung am Di., 16.4.13

4.1. Im Konvergenzsatz Satz 2.10 wurde die Lipschitzstetigkeit der Inkrementfunktion Φ benötigt. Zeigen Sie, daß diese Voraussetzung für explizite s-stufige RK-Verfahren erfüllt ist. Nehmen Sie hierzu an, daß $f \in C(\mathbb{R}^2)$ eine (globale) Lipschitzbedingung im 2. Argument mit Lipschitzkonstante $L > 0$ erfüllt. Zeigen Sie nun, daß dann die Inkrementfunktion Φ eine Lipschitzbedingung mit Konstante L_Φ erfüllt, wobei

$$L_\Phi \leq L \sum_{i=1}^{s} |b_i|(1+\eta)^i, \qquad \text{wobei} \qquad \eta = Lh \max_{i=1,\dots,s} \sum_{j=0}^{i-1} |a_{ij}|.$$

Im Wesentlichen vererbt sich also die Lipschitzkonstante von f auf die Inkrementfunktion Φ. *Hinweis:* Betrachten Sie die Differenz $k_i - \widehat{k}_i$, wobei k_i und $\widehat{k}_i$ die Stufen für Daten y, $\widehat{y}$ bezeichnen.

4.2. Ziel ist, eine Vorstellung der Beziehung zwischen der Toleranz τ_0 und der Anzahl Schritte von adaptiven Einschrittverfahren mit "*error per unit step*" zu entwickeln.

a) Zeigen Sie für den Konsistenzfehler des expliziten Eulerverfahrens

$$|\tau(\widetilde{t}, \widetilde{y}, h)| \leq h \|y''_{\widetilde{t},\widetilde{y}}\|_{L^1([\widetilde{t},\widetilde{t}+h])},$$

wobei $\|g\|_{L^1(I)} = \int_I |g(t)|\,dt$ bezeichnet.

b) Betrachten Sie den "Modellalgorithmus" Alg. 2.21 des Skriptes für das explizite Eulerverfahren. Nehmen Sie vereinfachend an, daß für den Konsistenzfehler die Beziehung $\tau(\widetilde{t}, h) = h\|y''_{ex}\|_{L^1([\widetilde{t},\widetilde{t}+h])}$ gilt, wobei y_{ex} die gesuchte Lösung des AWP ist. Zeigen Sie, daß dann für den Modellalgorithmus Alg. 2.21 für die Anzahl N der benötigten Schritte gilt:

$$N = \sum_{i=0}^{N-1} 1 \leq \|y''_{ex}\|_{L^1([t_0,T])}\ \tau_0^{-1}.$$

c) Betrachten Sie ein Verfahren der Ordnung p und nehmen Sie analog zu Teilaufg. b) an, daß der Konsistenzfehler die Beziehung $\tau(\widetilde{t}, h) = C_\tau h^p \|y_{ex}^{(p+1)}\|_{L^1([\widetilde{t},\widetilde{t}+h])}$ erfüllt. Zeigen Sie, daß für eine geeignete Konstante $C > 0$ gilt:

$$N = \sum_{i=0}^{N-1} 1 \leq C \|y_{ex}^{(p+1)}\|_{L^1([t_0,T])}^{1/p}\ \tau_0^{-1/p}.$$

Hinweis: wie Teilaufg. b). Zusätzlich Höldersche Ungleichung für Summen.

4.3. (**Programmieraufgabe 4.3**)

a) In der Vorlesung wurde gezeigt, wie der Schrittweitenvorschlag zu wählen ist, wenn der adaptive Algorithmus auf dem *error per unit step*-Kriterium basiert. Geben Sie die Schrittweitenvorschläge an, die entstehen, wenn die Schrittweiten nach dem *error per step* Kriterium gewählt werden sollen. Betrachten Sie den Fall eines Verfahrens der Ordnung p.

b) Welche Genauigkeit zum Endzeitpunkt T erwarten Sie, wenn Sie ein auf dem *error per step*-Kriterium basierenden Algorithmus mit Toleranz `tol` verwenden?

c) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion mit der Signatur

```
[t,y,Fevals,rejects]=rk4adaptiveEpS(f,y0,a,b,tol),
```

die einen adaptiven Algorithmus basierend auf dem RK4-Verfahren und dem *error per step*-Kriterium realiert. Modifizieren Sie hierzu das Codestück `rk4adaptive`, welches sich auf der VO-Homepage befindet.

d) Vergleichen Sie `rk4adaptive` (siehe Homepage der VO) und `rk4adaptiveEpS` für die Auswertung von $y(1)$, wobei die Lösung $y(t) = 1/(1+100t^2)$ das Anfangswertproblem $y' = -200ty^2$ mit $y(0) = 1$ löst. Vergleichen Sie hierzu insbesondere die Verfahren hinsichtlich "Fehler gegen vorgegebene Toleranz" und "Fehler gegen Anzahl Funktionsauswertungen" (Plotten Sie in beiden Fällen doppelt logarithmisch).

4.4. **a)** Sei $I = [0,1]$ und sei $T_k u$ das Taylorpolynom (um den Mittelpunkt $1/2$) vom Grad k der Funktion u. Zeigen Sie: es existiert eine Konstante $C_k > 0$, welche nur von k abhängt, so daß für alle $u \in C^{k+1}(\mathbb{R})$ gilt:

$$\|u - T_k u\|_{C(I)} \le C_k \|u^{(k+1)}\|_{L^1(I)}$$

b) Sei $Q : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ eine Quadraturformel der Form $Q(u) = \sum_{i=1}^n w_i u(x_i)$ mit Gewichten w_i und Stützstellen x_i. Sie die Quadraturformel exakt ist für Polynome vom Grad k, d.h.

$$\int_0^1 u(x)\,dx = Q(u) \qquad \forall u \in \mathcal{P}_k.$$

Zeigen Sie für hinreichend glatte u:

$$\left| \int_0^1 u(x)\,dx - Q(u) \right| \le C \min\{\|u\|_{C([0,1])}, \|u^{(k+1)}\|_{L^1(0,1)}\}$$

für eine Konstante $C > 0$, die nicht von u abhängt.

c) Sei $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$ ein Gitter Δ_N auf (a,b) mit Intervallen $I_i = [t_i, t_{i+1}]$ der Länge $h_i = t_{i+1} - t_i$. Definieren Sie die summierte Regel Q^Δ für Integration über (a,b) in der "üblichen" Art durch $Q^{\Delta_N}(u) := \sum_{i=0}^{N-1} Q_{t_i}^{t_{i+1}}(u)$ mit $Q_{I_i}(u) = \sum_{j=1}^n h_i w_j u(t_i + h_i x_j)$. Zeigen Sie

$$\left| \int_a^b u(x)\,dx - Q^\Delta(u) \right| \le C \sum_{i=0}^{N-1} \min\{h_i \|u\|_{C(I_i)}, h_i^{k+1} \|u^{(k+1)}\|_{L^1(I_i)}\}$$

d) Sei nun $(a,b) = (0,1)$ und $u(x) = x^\alpha$ für ein $\alpha \in (0,1)$. Sei Q die Simpsonregel. Was ist k? Zeigen Sie für die summierte Simpsonregel:

$$\left| \int_0^1 u(x)\,dx - Q^{\Delta_N}(u) \right| \le C \left[h_0^{\alpha+1} + \sum_{i=1}^{N-1} h_i^5 t_i^{\alpha-4} \right].$$

4.5. Bezeichne $S_\Delta(f)$ den Wert der summierten Simpsonregel auf dem Gitter Δ zur Approximation von $\int_0^1 f(t)\,dt$. Sei $f(t) = 11/10 t^\alpha$ mit $\alpha = 1/10$. Sei für $\beta > 1$ das Gitter $\Delta_N^\beta = (t_0, \ldots, t_N)$ gegeben durch $t_i = (i/N)^\beta$, $i = 0, \ldots, N$. Ziel der Aufgabe ist es, folgende Quadraturfehlerabschätzung zu zeigen:

$$\left| \int_0^1 f(t)\,dt - S_{\Delta_N^\beta}(f) \right| \le C \begin{cases} N^{-4} & \text{falls } (1+\alpha)\beta > 4 \\ N^{-4} \ln N & \text{falls } (1+\alpha)\beta = 4 \\ N^{-(1+\alpha)\beta} & \text{falls } (1+\alpha)\beta < 4. \end{cases} \tag{1}$$

a) Für $z \in \mathbb{R}$ und $N \in \mathbb{N}$ sei $\Sigma(N) = \sum_{i=1}^N i^z$. Zeigen Sie, daß es Konstanten $C_{1,z}$, $C_{2,z}$, $C_{3,z}$ gibt (die nicht von N abhängen), so daß für $\Sigma(N)$ folgende Abschätzungen gelten:

$z > -1$	$z = -1$	$z < -1$
$\Sigma(N) \le C_{1,z} N^{z+1}$	$\Sigma(N) \le C_{2,z} \ln N$	$\Sigma(N) \le C_{3,z}$

b) Zeigen Sie, daß für $h_j = t_{j+1} - t_j$ gilt: $h_j \le C N^{-1} t_j^{1-1/\beta}$ ($j \ge 1$, $C > 0$ geeignet). Für das Element $I_0 = [t_0, t_1] = [0, t_1]$ gilt trivialerweise $h_0 = t_1$.

c) Verwenden Sie Ihr Ergebnis aus Aufg. 4, um die gewünschte Abschätzung (1) zu erhalten.

d) Für $\beta > 4/(1+\alpha)$ ergibt sich die optimale Konvergenzrate bei der summierten Simpsonregel. Wie müßten Sie den Graduierungsparameter β wählen, wenn Sie anstelle der summierten Simpsonregel die summierte Trapezregel wählen? Welche Konvergenz erwarten Sie nun?

4.6. Betrachten Sie das AWP $y' = f(t,y)$, $y(0) = 0$ mit $f(t,y) = (11/10)\, t^{1/10}$.

a) Zeigen Sie: für jedes Gitter $\Delta = (t_0, \ldots, t_N)$ mit $t_0 = 0$ und $t_N = 1$ liefert das RK4-Verfahren gerade den Wert der summierten Simpsonregel (mit diesem Gitter) für $\int_0^1 \frac{11}{10} t^{1/10}\,dt$.

b) Welches Konvergenzverhalten (Fehler gegen N) erwarten Sie mit den graduierten Gittern Δ_N^β aus Aufg. 4.5?

c) Programmieren Sie das RK4-Verfahren auf den Gittern Δ_N^β aus Aufg. 4.5 für (i) $\beta = 1$ (d.h. uniforme Gitter), (ii) $\beta = 3$, (iii) $\beta = 4/1.1$, (iv) $\beta = 5$, sowie (vi) mittels des adaptiven Algorithmus `rk4adaptive` aus Aufg. 4.3 (Toleranzen 10^{-n}, $n = 1, \ldots, 10$). Plotten Sie (doppelt logarithmisch) für alle Fälle den Fehler gegen die Anzahl benötigter Funktionsauswertungen. Diskutieren das Verhalten der Verfahren anhand Ihrer Plots. Falls man die Gitter Δ_N^β aus Aufg. 4.5 verwendet, sollte man Ihrer Meinung nach β lieber zu groß oder zu klein wählen? Ist ein adaptives Verfahren besser als die “richtige” Wahl von β?