

Serie 5

Besprechung am Di., 23.4.13

- 5.1.** **a)** Zeigen Sie, daß für ein (implizites oder explizites) RK-Verfahren der Konsistenzordnung $p \geq 1$ gilt: angewandt auf rechte Seiten $f(t, y) = \pi(t)$ mit $\pi \in \mathcal{P}_{p-1}$ ist das Verfahren exakt. *Hinweis:* der Konsistenzfehler $h \mapsto \tau(t_0, y_0, h)$ ist ein Polynom.
- b)** Zeigen Sie, daß für ein s -stufiges (implizites oder explizites) Runge-Kutta-Verfahren die Konsistenzordnung p die Abschätzung $p \leq 2s$ erfüllen muß.
Bemerkung: Gaußverfahren realisieren also die maximal erreichbar Konsistenzordnung.

- 5.2.** Sei $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ eine diagonalisierbare Matrix und betrachten Sie das System von Differentialgleichungen

$$\underline{y}' = \mathbf{B}\underline{y}.$$

Zeigen Sie, daß die Anwendung eines RK-Verfahrens auf dieses System äquivalent zur Anwendung desselben RK-Verfahrens auf das Problem in der diagonalisierten Form. Zeigen Sie, daß das RK-Verfahren in der diagonalisierten Form gerade die *komponentenweise* Anwendung der RK-Verfahrens ist, d.h. ein entkoppeltes System der Form

$$\tilde{y}'_i = \lambda_i \tilde{y}_i, \quad i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

ist, wobei die $\lambda_i \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte von \mathbf{B} sind.

- 5.3. (Kollokationsverfahren)** Seien $c_1, \dots, c_s \in [0, 1]$ paarweise verschiedene Stützstellen. Wir definieren das *Kollokationsverfahren* wie folgt: Sei $u \in \mathcal{P}_s$ das Polynom vom Grad s , welches die Kollokationsbedingungen

$$\begin{aligned} u(t_0) &= y_0, \\ u'(t_0 + c_i h) &= f(t_0 + c_i h, u(t_0 + c_i h)), \quad i = 1, \dots, s, \end{aligned}$$

erfüllt. Ein Schritt des Einschrittverfahrens ist dann gegeben durch

$$y_1 = u(t_0 + h).$$

- a)** Zeigen Sie, daß das Kollokationsverfahren ein (implizites) RK-Verfahren ist, wobei

$$a_{ij} = \int_0^{c_i} l_j(t) dt, \quad b_j = \int_0^1 l_j(t) dt$$

und

$$l_j(t) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^s \frac{t - c_i}{c_j - c_i}$$

Hinweis: Schreiben Sie $u'(t) = \sum_{j=1}^s k_j l_j(t)$.

- b)** Zeigen Sie: Die Koeffizienten a_{ij} und b_i eines Kollokationsverfahrens erfüllen

$$\sum_{j=1}^s b_j c_j^{k-1} = \frac{1}{k}, \quad k = 1, \dots, s. \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^s a_{ij} c_j^{k-1} = \frac{c_i^k}{k}, \quad i, k = 1, \dots, s. \tag{3}$$

- 5.4. (Kollokationsverfahren—Fortsetzung)** Betrachten Sie ein Kollokationsverfahren wie in Aufg. 5.3 gegeben. Zeigen Sie: Ein Kollokationsverfahren mit s Stufen liefert ein Verfahren der Ordnung (mindestens) s . Genauer: Auf dem Intervall $[t_0, t_0 + h]$ liefert die Approximation u aus Aufg. 5.3, a) eine Approximation an die exakte Lösung y_{t_0, y_0} mit

$$\|y_{t_0, y_0} - u\|_{C([t_0, t_0+h])} \leq Ch^{s+1}.$$

Hinweis: Es gilt $y(t) - u(t) = \int_{t_0}^t y'(\tau) - u'(\tau) d\tau$. Schieben Sie ein Interpolationspolynom von y'_{t_0, y_0} ein. Versuchen Sie, eine Abschätzung der Form $\|y_{t_0, y_0} - u\|_{C([t_0, t_0+h])} \leq h \max_{j=1, \dots, s} |(y'_{t_0, y_0} - u')(t_0 + c_j h)| + \dots$ mittels einer geeigneten interpolatorischen Quadraturformel zu erhalten. Schließen Sie mittels der von y_{t_0, y_0} und u erfüllten Gleichungen auf das gewünschte Resultat für h hinreichend klein. Sie können $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ und Beschränktheit aller von Ihnen benötigten Ableitungen annehmen.

Bemerkung: Die Gauß- und Radau-Verfahren sind spezielle Kollokationsverfahren, bei denen die c_j als die Gaußpunkte (bzw. die Radaupunkte) gewählt werden. Diese Verfahren liefern Verfahren, die sogar die Ordnung $2s$ bzw. $2s - 1$ haben.

5.5. (Programmieraufgabe 5.5) Schreiben Sie ein MATLAB-Programm mit der Signatur

$$[y, \text{iter}] = \text{IRK}(f, fy, t0, y0, h, A, b, c, \text{tol}),$$

welches einen Schritt der Länge h von einem impliziten RK-Verfahren macht. Dabei sind b, c Spaltenvektoren und A eine Matrix, die zusammen das Butcherschema des IRK beschreiben. Die Gleichung für die Stufen soll mit dem Newtonverfahren bestimmt werden, wobei die Abbruchbedingung (der Einfachheit halber) ist, daß die 2-Norm der Differenz zweier aufeinanderfolgender Iterierten $\leq \text{tol}$ ist. f und fy sollen *function handles* sein für die skalaren Funktionen $(t, y) \mapsto f(t, y)$ und $(t, y) \mapsto f_y(t, y)$. Die Ausgabevariable iter soll die Anzahl benötigter Newtonschritte sein.

Testen Sie Ihr Programm mit dem 2-stufigen Gaußverfahren gegeben durch

$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3-2\sqrt{3}}{12}$
$\frac{3+\sqrt{3}}{6}$	$\frac{3+2\sqrt{3}}{12}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- a) Plotten Sie für $f(t, y) = \lambda y$, $y_0 = 1$, die Konvergenz "Anzahl Schritte N gegen Fehler bei $T = 1$ " bei uniformer Schrittweite. Für $\lambda = -25$ geben Sie auch die maximale Anzahl Newtonschritte an, die Sie in einem Schritt Ihres IRK benötigen haben. Erklären Sie, warum diese Anzahl Newtonschritte benötigt wurde.
- b) Was könnte eine sinnvolle Wahl des Parameters tol im Fall von IRK-Verfahren der Konsistenzordnung p sein?