Serie 7

Besprechnung am Di., 7.5.13

7.1. (Lobattoquadratur) Zeigen folgende Aussage: Zu $s \geq 2$ gibt es Knoten $0 = c_1 < c_2 < \cdots < c_{s-1} < c_s = 1$ und positive Gewichte b_i, $i = 1, \ldots, s$ so daß die Quadraturformel $Q(f) := \sum_{i=1}^{s} b_i f(c_i)$ exakt ist für Polynome $f \in \mathcal{P}_{2s-3}$.

7.2. (Extrapolationsverfahren) Betrachten Sie ein explizites Einschrittverfahren der Ordnung p mit Inkrementfunktion Φ für eine Differentialgleichung $y' = f(t, y)$. Nehmen Sie der Einfachheit halber an, daß $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ und $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ und daß alle Ableitungen von f und Φ beschränkt sind. Es sei y_{ex} die Lösung des AWP $y' = f(t, y)$ mit $y_{ex}(t_0) = y_0$. Den Konsistenzfehler "auf" der Lösung bezeichnen wir mit $\tau_{auf}(t, h) := \tau(t, y_{ex}(t), h)$. Nehmen Sie an, daß der Konsistenzfehler eine Darstellung

$$\tau_{auf}(t, h) = d(t)h^{p+1} + R(t, h)$$

zuläßt, wobei die Funktion R eine Abschätzung

$$|R(t, h)| \leq Ch^{p+2} \qquad \forall t \in [t_0, T], \quad h \in (0, h_0]$$

erfüllt und d glatt ist.

a) Definieren Sie ein zweites Verfahren, basierend auf Φ, das aus einem "Doppelschritt" der Länge $h/2$ besteht:

$$\widehat{y}_1 := y_{1/2} + \frac{h}{2}\Phi(t_{1/2}, y_{1/2}, h/2), \qquad y_{1/2} := y_0 + \frac{h}{2}\Phi(t_0, y_0, h/2),$$

wobei $t_{1/2} = t_0 + h/2$. Geben Sie die Inkrementfunktion $\widehat{\Phi}$ an, die dieses Verfahren beschreibt. Zeigen Sie: "Auf" der Lösung ist der Konsistenzfehler $\widehat{\tau}_{auf}(t, h) := \widehat{\tau}(t, y_{ex}(t), h)$ dieses neuen Verfahrens von der Form

$$\widehat{\tau}_{auf}(t, h) = \tau(t, h/2) + \tau(t + h/2, h/2) + \widehat{R}(t, h),$$

wobei $|\widehat{R}(t, h)| \leq \widehat{C}h^{p+2}$ für eine geeignete Konstante $\widehat{C}$ unabhängig von $h \in (0, h_0]$.

b) Überlegen Sie sich, wie Sie die beiden Verfahren (Inkrementfunktionen Φ und $\widehat{\Phi}$) aus Teilaufg. a) kombinieren können, um ein Verfahren der Ordnung $p + 1$ zu erhalten. *Hinweis:* Machen Sie den Ansatz $\widetilde{y} := c_1 y_1 + c_2 \widehat{y}$, wobei y_1 und $\widehat{y}$ die Approximationen zu den Inkrementfunktionen Φ, $\widehat{\Phi}$ gehören, und nutzen Sie aus, daß die Funktion $t \mapsto d(t)$ in der Darstellung von τ_{auf} glatt ist.

7.3. (**Programmieraufgabe 7.3**) Programmieren Sie Routinen mit folgenden Signaturen:

$$[y] = \texttt{euler\_multistep}(f, t, y, h, n)$$
$$[y] = \texttt{euler\_extrapol}(f, t, y, h)$$
$$[y] = \texttt{euler\_doubly\_extrapol}(f, t, y, h)$$

dabei soll f immer ein *function handle* auf eine skalarwertige Funktion sein. Diese Routinen realisieren jeweils einen Schritt der Länge h eines Einschrittverfahrens:

(i) `euler_multistep` macht n (explizite) Eulerschritte der Länge h/n,

(ii) `euler_extrapol` extrapoliert das explizite Eulerverfahren: sei y_1 ein Schritt des Eulerverfahrens mit Länge h und $\widehat{y}_1$ zwei Schritte des Eulerverfahrens mit jeweils Länge $h/2$, dann ist

$$\texttt{euler\_extrapol} = \frac{1}{2^p - 1}\left[2^p \widehat{y}_1 - y_1\right] \qquad \text{mit } p = 1.$$

(iii) `euler_doubly_extrapol` extrapoliert das extrapolierte explizite Eulerverfahren: bezeichnet y_1 einen Schritt des extrapolierten Eulerverfahrens mit Länge h und $\widehat{y}_1$ zwei Schritte des extrapolierten Eulerverfahrens mit jeweils Länge $h/2$, dann ist

$$\texttt{euler\_doubly\_extra} = (2^p \widehat{y}_1 - y_1)/(2^p - 1) \qquad \text{mit } p = 2.$$

Testen Sie Ihre Programme, indem Sie für das AWP $y' = y$ mit $y(0) = 1$ den Fehler zum Endzeitpunkt $T = 1$ gegen die Anzahl Schritte N auftragen. Betrachten Sie das Verhalten der Verfahren `euler_multistep` für $n = 1$, $n = 2$, $n = 4$, sowie `euler_extrapol`, `euler_doubly_extrapol`. Welches Konvergenzverhalten beobachten Sie? Erklären Sie mit Aufg. 2.

7.4. (**Programmieraufgabe 7.4**) Betrachten Sie die folgende AWP:

$$\begin{aligned}
y_1'(t) &= c_1\left[y_2 + y_1\left\{1 - c_2 y_1 - y_2\right\}\right]\\
y_2'(t) &= \frac{1}{c_1}\left[y_3 - (1+y_1)y_2\right]\\
y_3'(t) &= c_3\left(y_1 - y_3\right)\\
& \quad c_1 = 77.27, \qquad c_2 = 8.375\cdot 10^{-6}, \qquad c_3 = 0.161\\
& \quad y(0) = (4, 1.1, 4)^\top.
\end{aligned}$$

Schreiben Sie für dieses System ein Programm

$$[err] = \texttt{oregonator}(\texttt{T}, \texttt{N})$$

mit Eingabeparametern Endzeit T und Anzahl Schritte N, welches 3 Plots erzeugt: `figure`(1) zeigt die Beträge der drei Lösungskomponenten über t, die mit dem *expliziten* Eulerverfahren bestimmt wurden, `figure`(2) enthält die Beträge der drei Lösungskomponenten über t, die mit dem *impliziten* Eulerverfahren bestimmt wurden, `figure`(3) enthält die Beträge der drei Lösungskomponenten über t, die mit der MATLAB-Routine `ode15s` (`help ode15s`) erzeugt werden. Die Plots sollen alle *semilogarithmisch* sein, d.h. verwenden Sie `semilogy`. Lösen Sie das Gleichungssystem für das implizite Eulerverfahren mit dem Newtonverfahren (Toleranz 10^{-10} und maximaler Anzahl Newtonschritte 100). Die Ausgabe soll die 2-Norm der Differenz Ihres mit dem impliziten Eulerverfahrens und der von `ode15s` bestimmten Lösung zum Zeitpunkt T sein. Zum Testen der ODE ist $T = 5$ und $N = 1000$ ein sinnvolle Kombination.

7.5. Zeigen Sie, daß ein k-Schritt-BDF-Verfahren Konsistenzordnung k hat.

7.6. (Mehrschrittverfahren variabler Schrittweite) Seien $t_0, \ldots,$ Knoten und $h_i = t_{i+1} - t_i$ die Schrittweiten. Mit f_i bezeichnen wir $f(t_i, y_i)$. Formulieren Sie ein k-Schrittverfahren basierend auf dem Konstruktionsprinzip der Adams-Verfahren der Form

$$y_{i+1} - y_i = \sum_{j=0}^{k} b_{i,j}(h_{i+1}, h_i, \ldots, h_{i+2-k}) f_{i+1-j}.$$

Geben Sie für den Fall $k = 2$ die Funktionen $b_{i,j}$, $j = 0, 1, 2$ an.