Serie 8

Besprechnung am Di., 14.5.13

8.1. Betrachten Sie die DAE

$$\begin{aligned} u' &= d(u,v) \\ 0 &= c(u). \end{aligned}$$

Eine solche DAE kann nicht den Index 1 haben (Warum?). Geben Sie Bedingungen an die Funktionen c, d an, so daß sie Index 2 hat.

8.2. (**Programmieraufgabe 8.2**) Schreiben Sie ein MATLAB-Funktion

[u1,v1] = `one_step_stiffly_accurate`(t0,u0,v0,h,A,B,epsilon).

Diese Routine soll einen Schritt der Länge h eines steifgenauen Verfahrens (z.B. eines Radau IIA-Verfahrens) machen für die ODE

$$\begin{pmatrix} u \\ \varepsilon v \end{pmatrix}' = \mathbf{B} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Hier ist $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$ eine Matrix. Die Variablen u, v sind $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$-wertig. Das steifgenaue Verfahren soll die Butchermatrix $A \in \mathbb{R}^{s\times s}$ haben.

Hinweise: Verwenden Sie wie in der VO die Formulierung des RK-Verfahren mittels der Stufenapproximationen g_i. Eine kompakte Formulierung des Algorithmus in MATLAB ist mit dem Befehl `kron` (für das Kroneckerprodukt von Matrizen) möglich.

Testen Sie Ihr Verfahren für das System

$$\begin{pmatrix} u \\ \varepsilon v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Sinnvolle Parameterwerte zum Testen sind $\varepsilon = 10^{-3}$, $t_0 = 0$, $T = 10^{-1}$, $h = \varepsilon$. Zum Testen kann es sinnvoll sein, den MATLAB-Löser `ode15s` zu verwenden, um die "exakte" Lösung zu sehen.

8.3. **a)** Zeigen Sie, daß $\lambda = 1$ eine Nullstelle des ersten charakteristischen Polynoms eines konsistenten LMM ist.

b) Zeigen Sie, daß die Adams-Verfahren nullstabil sind.

c) Zeigen Sie, daß das BDF3-Verfahren, welches durch

$$11y_{i+1} - 18y_i + 9y_{i-1} - 2y_{i-2} = 6hf_{i+1}$$

gegeben ist, nullstabil ist.

8.4. **a)** Bestimmen Sie alle 2-Schrittverfahren der Konsistenzordnung (mindestens) 3. Dabei sei oBdA $\alpha_2 = 1$.

b) Welche dieser Verfahren sind nullstabil?

c) Gibt es unter den Verfahren auch explizite 2-Schrittverfahren? Sind diese nullstabil?

d) Gibt es unter den Verfahren auch solche der Ordnung 4? Sind diese nullstabil?

8.5. Zeigen Sie folgende Aussagen über die maximal erreichbare Ordnung:

a) Es kann kein k-Schrittverfahren der Konsistenzordnung $2k + 1$ geben

b) Es gibt genau ein explizites k-Schrittverfahren der Konsistenzordnung $2k - 1$.

Hinweis: Zeigen Sie, daß geeignete Hermiteinterpolationsaufgaben eindeutig lösbar sind, und wählen Sie mit dieser Information geeignete Basen von Polynomräumen.

8.6. Aufgabe 5 behandelt nicht den Fall von impliziten k-Schrittverfahren der Konsistenzordnung $2k$. Zeigen Sie: Es existiert genau ein implizites k-Schrittverfahren der Konsistenzordnung $2k$.

8.7. Ein k-Schrittverfahren heißt *symmetrisch*, falls

$$\alpha_{k-j} = -\alpha_j, \qquad \beta_{k-j} = \beta_j, \qquad j = 0, \dots, k.$$

Zeigen Sie: die (maximale) Konsistenzordnung p ist gerade.