Serie 9

Besprechnung am Di., 28.5.13

9.1. Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{k\times k}$ heißt *stabil* ("power bounded"), falls es eine Matrixnorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{C}^k$ und eine Konstante $C > 0$ gibt, so daß

$$\|A^n\| \leq C \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie: falls (1) für *eine* Matrixnorm gilt, dann gilt (1) bereits für *jede* Norm.

b) Zeigen Sie folgende Äquivalenz: A ist stabil genau dann, wenn für das Spektrum $\sigma(A)$ gilt: für alle $\lambda \in \sigma(A)$ gilt $|\lambda| \leq 1$ und $|\lambda| = 1$ impliziert, daß die geometrische Vielfachheit von λ mit der algebraischen Vielfachheit übereinstimmt. *Hinweis:* Ein (einzelner) Jordanblock $J \in \mathbb{C}^{\mu\times\mu}$ zum EW λ kann geschrieben werden als $J = \lambda \mathrm{Id}_\mu + N$. Es gilt der binomische Lehrsatz: $J^n = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu}\lambda^{n-\nu}N^\nu$. Wie sieht Ne_ℓ aus, wenn $e_\ell \in \mathbb{C}^\mu$ ein Einheitsvektor ist? Betrachten Sie die beiden letzten Komponenten der Vektoren $J^n e_\mu$, wobei $e_\mu = (0,0,\ldots,0,1)^\top$.

9.2. (**Programmieraufgabe 9.2**) Programmieren Sie das 4-Schritt Adams-Moulton Verfahren der Ordnung 4 gegeben durch

$$y_{i+1} = y_i + h\frac{1}{24}\left(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}\right),$$

wobei die benötigten Startwerte y_1, y_2, y_3 auf verschiedene Art berechnet werden.

a) Schreiben Sie eine Matlab-Routine

$$[yam, tam] = \texttt{adams\_moulton4}(t0, T, N, y0, y1, y2, y3, f, df)$$

Hier sollen f und df *function handles* sein auf die Funktionen f und $\partial_y f$. Es sollen N Schritte gemacht werden. Die benötigten Startwerte y_0, y_1, y_2, y_3 werden ebenfalls mit übergeben. Lösen Sie die nichtlineare Gleichung mit dem Newtonverfahren (Abbruchkriterien: Residuum $\leq 10^{-12}$, maximal 100 Newtonschritte). Die Ausgabe yam und tam sollen Vektoren der Länge $N+1$ sein, die die y-Werte und die Zeitwerte enthalten.

b) Testen Sie Ihr Programm mit dem Anfangswertproblem

$$y' = \lambda y, \qquad y(0) = 1, \qquad T = 1, \qquad \lambda = 1.$$

Verwenden Sie $N = 2^j$, $j = 2,\ldots,10$. Zur Startwertberechnung verwenden Sie folgende Fälle:

1. y_1, y_2, y_3 sind durch die exakte Lösung $y(t) = e^{\lambda t}$ gegeben
2. y_1, y_2, y_3 werden durch das RK4-Verfahren bestimmt.
3. y_1, y_2, y_3 werden mit dem Eulerverfahren mit Schrittweite $\widetilde{h} = h^2 = \left(\frac{T-t_0}{N}\right)^2$ bestimmt.
4. y_1, y_2 werden mit dem Eulerverfahren mit Schrittweite $\widetilde{h} = h^3 = \left(\frac{T-t_0}{N}\right)^3$ bestimmt.

Plotten Sie den Fehler $(y(1) - y_N)$ gegen die Schrittweite $h = \frac{T-t_0}{N}$ doppelt logarithmisch. Was beobachten Sie? Erklären Sie.

9.3. Sei m_C die Ordnung eines (impliziten) Adams-Moulton-Verfahrens mit k Schritten und m_P die Ordnung eines expliziten Verfahrens. Zeigen Sie, daß das Verfahren, welches durch $P(EC)^m$ beschrieben wird, die Konsistenzordnung $\min\{m_C, m_P + m\}$ hat. *Hinweis:* Sie können wieder annehmen, daß $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ und alle von Ihnen benötigten Ableitungen beschränkt sind.

9.4. Implementieren Sie das Prädiktor-Korrektor-Verfahren $P(EC)^m$ für das explizite Euler-Verfahren als Prädiktor und das implizite Adams-Moulton-Verfahren der Ordnung 3 als Korrektor in Form einer MATLAB-Funktion

```
y = predcor(m,t,y0,y1,f)
```

Dabei ist $t \in \mathbb{R}^n$ ein Zeilenvektor mit den Stützstellen, y_0, $y_1 \in \mathbb{R}^d$ sind Spaltenvektoren mit den Startwerten und f ist ein *function handle* für die Funktion $f(t, y)$. Sie dürfen annehmen, daß die Schrittlänge konstant ist. Der Parameter m gibt die Anzahl der Korrektorschritte an. Der Ausgabewert ist eine Matrix $y \in \mathbb{R}^{d\times n}$, deren Spalten gerade die Approximationen zu den Zeitpunkten t sind. Schreiben Sie weiters eine MATLAB-Funktion `y1 = compute_y1(hh,N,t0,y0,f)` , die N Schritte des expliziten Eulerverfahrens mit Schrittlänge hh und Startwerten $t0 \in \mathbb{R}$, $y0 \in \mathbb{R}^d$ macht. Schreiben Sie schließlich eine MATLAB-Funktion `compare_methods(nmax)`, welche 6 Konvergenzgraphen (Fehler gegen Schrittweite $h = 2^{-n}$, $n = 0, \dots, nmax$) zeigt. Es werden folgende Kombinationen betrachten: $m \in \{1, 2, 3\}$ und $hh = h$ sowie $hh = h^2$. Es wird das AWP

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} y, \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gelöst mit Lösung $y(t) = (1, 1)^\top e^t$. Der Fehler ist der Fehler bei $T = 1$. Erklären Sie das Verhalten der 6 Kurven. Diskutieren Sie die Kosten für die beiden Anlaufrechnungen im Vergleich zu dem Gesamtkosten des Verfahrens.

Das Adams-Moulton-Verfahren der Ordnung 3 ist gegeben durch

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}\left(5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1}\right).$$

9.5. **a)** Für ein LMM bezeichnet $S = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \text{die NS von } \zeta \mapsto \rho(\zeta) - z\sigma(\zeta) \text{ erfüllen die Wurzelbedingung}\}$ das Stabilitätsgebiet. Definieren Sie die Funktion $\zeta \mapsto w(\zeta) := \rho(\zeta)/\sigma(\zeta)$. Zeigen Sie: $S\setminus\{1/\beta_k\} \subset w(K_1(0))$, wobei $K_1(0)$ die abgeschlossene Einheitskugel in $\mathbb{C}$ ist. Nehmen Sie an, daß das LMM konsistent ist.

b) Zeigen Sie, daß für A-stabile LMM gilt:

$$\mathrm{Re} w(\zeta) \geq 0 \qquad \forall \zeta \in \mathbb{C}, \quad |\zeta| > 1.$$

c) Zeigen Sie, daß explizite LMM nicht A-stabil sein können.

d) Die Adams-Moulton-Verfahren haben für $k \geq 2$ ein beschränktes Stabilitätsgebiet. Zeigen Sie eine (stark) vereinfachte Fassung dieses Resultates: Unter Verwendung der Tatsache, daß es ein $\zeta_k < -1$ gibt mit $\sigma(\zeta_k) = 0$, zeigen Sie, daß es ein $z_0 > 0$ gibt, so daß $(-\infty, -z_0)$ oder (z_0, ∞) nicht im Stabilitätsgebiet liegt.

9.6. (**Programmieraufgabe 9.6**)

Das **Schießverfahren** ist ein Verfahren zum Lösen von *Randwertproblemen* mit Techniken für *Anfangswertprobleme* (siehe Skript für Details). Die benötigten Bausteine sind damit nur Anfangswertproblemlöser und das Newtonverfahren.

Ziel ist das Lösen des Randwertproblems

$$y'' = f(t, y, y'), \qquad y(0) = a, \quad y(1) = b$$

Idee: Finde $s = y'(0)$, so daß die gesuchte Lösung y gerade die Funktion $t \mapsto y(t, s)$ ist, wobei $t \mapsto y(t, s)$ die Lösung des folgenden Anfangswertproblems ist:

$$y'' = f(t, y, y'), \qquad y(0) = a, \quad y'(0) = s.$$

Damit ist das Lösen auf folgende Nullstellenbestimmung zurückgeführt: Finde die Nullstelle s der Funktion $F(s) = y(1, s) - b$. Dies kann mit dem Newtonverfahren (numerisch) realisiert werden.

Schreiben Sie eine MATLAB-Routine

$$[errs] = \texttt{simple\_shooting}(n, s)$$

welches das *Randwertproblem*

$$y'' = \frac{3}{2}y^2, \qquad y(0) = 4, \qquad y(1) = 1$$

mit dem einfachen Schießverfahren löst. Hierbei soll n die Anzahl Newtonschritte sein und s der Startwert für das Newtonverfahren (d.h. eine erste Approximation an $y'(0)$). Der Vektor `errs` hat die Länge n und enthält die Fehler des Newtonverfahren. Genauer: $\texttt{errs}(i) = |y(1) - y_N^{(i)}| = |1 - y_N^{(i)}|$, wobei $y_N^{(i)}$ die Approximation an $y(1)$ ist, die im i-ten Newtonschritt erzielt wird. Plotten Sie weiters (innerhalb Ihrer Funktion—`help hold on`) die erzielte Lösung in diesem Newtonschritt.

Gehen Sie wie folgt vor:

1. Formulieren Sie die obige Gleichung als ein System 1. Ordnung
2. Für das Newtonverfahren benötigen Sie die Ableitung F'. Formulieren Sie die entsprechenden Anfangswertprobleme, welche die Funktionen $t \mapsto \partial_s y(t)$ und $t \mapsto \partial_s y'(t)$ bestimmt.
3. Überlegen Sie sich ein System von ODEs, welches y, y', $\partial_s y$, $\partial_s y'$ simultan löst[1]
4. Verwenden Sie den MATLAB-ODE-Löser `ode15s` zum Lösen der entsprechenden AWPs. Verlassen Sie sich der Einfachheit halber darauf, daß die Standardtoleranzen von `ode15s` ein sinnvolles Ergebnis liefern werden.

Plotten Sie `errs` über der Anzahl Newtonschritte für die Eingabe $n = 10$ und $s = 1$.

[1] sonst wird die Datenstruktur sehr mühsam!