Serie 10

Besprechnung am Di., 4.6.13

10.1. **a)** Eine Funktion $\mathcal{I} \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ heißt *Invariante/erstes Integral* der ODE $y' = f(y)$, wenn für jeden Startwert $y_0 \in \mathbb{R}^d$ gilt: $t \mapsto I(y_{0,y_0}(t))$ ist konstant. Zeigen Sie: I ist genau dann eine Invariante/erstes Integral der ODE, wenn

$$\nabla I(z) \cdot f(z) = 0 \qquad \forall z \in \mathbb{R}^d. \tag{1}$$

b) Sei $I \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$ für ein $m > 1$. Geben Sie die zu (1) analoge Bedingung an die Funktion I an, damit I eine Invariante der ODE ist.

c) Zeigen Sie: für ein hamiltonsches System ist die Hamiltonfunktion H eine Invariante.

10.2. (*symplektisches Euler Verfahren*) Für ein Differentialgleichungssystem der Form

$$x' = f(x,y) \qquad y' = g(x,y) \tag{2}$$

definiert man einen Schritt des symplektischen Euler Verfahrens durch

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + hf(x_i, y_i) \\ y_{i+1} &= y_i + hg(x_{i+1}, y_{i+1}) \end{aligned}$$

Sei nun $f(x,y) = y$, $g(x,y) = -x$.

a) Zeigen Sie: Jede Lösung von (1) liegt auf einem Kreis, d.h.

$$H(t) \equiv x^2(t) + y^2(t) = \text{constant} \qquad \forall t$$

b) Wenden Sie das symplektische Euler-Verfahren mit Schrittweite h auf die Differentialgleichung an und geben Sie die Abbildung $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix}$ explizit an.

c) Zeigen Sie: Die numerische Approximation (x_i, y_i) liegt ebenfalls auf einer invarianten, geschlossenen Kurve. *Hinweis:* Es genügt zu zeigen, daß die Approximationen (x_i, y_i) auf einer Ellipse der Form

$$x_i^2 + hx_iy_i + y_i^2 \equiv \text{constant} \qquad \forall i$$

liegen.

10.3. Jedes RK-Verfahren erhält linearen Invarianten für ODEs der Form $y' = f(y)$.

10.4. Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ und es existiere $L > 0$ mit $\|f(y)\| + \|Df(y)\| \leq L$ für alle $y \in \mathbb{R}^d$. Mit $\Phi^t(y_0)$ bezeichnen wir die Lösung $y_{0,y_0}(t)$ des AWPs $y' = f(y)$, $y(0) = y_0$.

a) Zeigen Sie: für jedes $y_0 \in \mathbb{R}^d$ existiert $\Phi^t(y_0)$ für alle $t \in \mathbb{R}$

b) Zeigen Sie: es gilt für alle t, $h \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} y_{h,y_0}(t+h) &= y_{0,y_0}(t) \\ y_{h,y_{0,y_0}(h)}(t) &= y_{0,y_0}(t). \end{aligned}$$

c) Zeigen Sie: $\Phi^{t+h} = \Phi^t \circ \Phi^h = \Phi^h \circ \Phi^t$ auf $\mathbb{R}^d$. Schließen Sie $\Phi^t \circ \Phi^{-t} = \mathrm{I}$ auf $\mathbb{R}^d$ für jedes $t \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist $\Phi^0 = \mathrm{I}$.

10.5. Seien Ψ_1^h, Ψ_2^h zwei diskrete Evolutionen.

a) Zeigen Sie:

$$((\Psi_1^h)^\star)^\star = \Psi_1^h, \qquad (\Psi_1^h \circ \Psi_2^h)^\star = (\Psi_2^h)^\star \circ (\Psi_1^h)^\star$$

b) Zeigen Sie: $\Psi_1^h \circ (\Psi_1^h)^\star$ ist symmetrisch/reversibel.

10.6. Es soll gezeigt werden, daß ein s-stufiges RK-Verfahren reversibel/symmetrisch ist, wenn

$$a_{s+1-i,s+1-j} + a_{ij} = b_j \qquad \forall i,j \in \{1,\dots,s\}. \tag{3}$$

a) Zeigen Sie: Die Bedingung (3) impliziert $b_{s+1-j} = b_j$ für $j = 1,\dots,s$.

b) Betrachten Sie

$$\begin{aligned} \widetilde{y}_0 &= \widetilde{y}_1 - h\sum_{i=1}^s b_i \widetilde{k}_i, \\ \widetilde{k}_i &= f(\widetilde{y}_1 - h\sum_{j=1}^s a_{ij}\widetilde{k}_j), \qquad j = 1,\dots,s. \end{aligned}$$

Seien weiters k_i die Stufen des RK-Verfahrens (Startwert y_0, $y_1 = y_0 + h\sum_{i=1}^s b_i k_i$). Zeigen Sie, daß für $\widetilde{y}_0 = y_0$ die Werte $\widetilde{y}_1 = y_1$, $\widetilde{k}_i = k_{s+1-i}$ eine Lösung sind. Schließen Sie, daß RK-Verfahren mit (3) reversibel sind.

10.7. **a)** Zeigen Sie: die Gaußpunkte und Gaußgewichte sind symmetrisch bezüglich dem Intervallmittelpunkt.

b) Zeigen Sie: Die Gaussverfahren sind symmetrisch. *Hinweis:* Gauß-Verfahren sind gerade die Kollokationsverfahren zu den Gaußpunkten; Aufg. 10.6

10.8. Zeigen Sie: kein explizites RK-Verfahren kann symmetrisch/reversibel sein. *Hinweis:* Zeigen Sie, daß für die Stabilitätsfunktion R eines symmetrischen/reversiblen RK-Verfahrens gelten muß: $R(z)R(-z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ hinreichend nahe bei 0.