Serie 11

Besprechung am Di., 18.6.13

11.1. Zeigen Sie: erhält eine diskrete (konsistente) Evolution Ψ^h quadratische Invarianten, dann erhält auch die adjungierte Evolution $(\Psi^h)^\star$ quadratische Invarianten. Sie dürfen der Einfachheit halber annehmen, daß die Evolutionen Ψ^h und $(\Psi^h)^\star$ für alle $h \in \mathbb{R}$ und für alle $y \in \mathbb{R}^d$ definiert sind.

11.2. ("composition method") Sei $\Phi^h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ die kontinuierliche Evolution und bezeichne Ψ^h eine diskrete Evolution (die wir der Einfachheit halber auch als Abbildung $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ auffassen) mit Konsistenzordnung p. Nehmen Sie an, daß es eine C^1-Funktion $C : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ gibt mit

$$\Psi^h(y) - \Phi^h(y) = C(y)h^{p+1} + O(h^{p+2}), \qquad |h| \to 0.$$

Seien γ_1, $\gamma_2 \in \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \gamma_1 + \gamma_2 &= 1 \\ \gamma_1^{p+1} + \gamma_2^{p+1} &= 0. \end{aligned}$$

Definieren Sie ein neues Verfahren $\widehat{\Psi}^h$ durch

$$\widehat{\Psi}^h(y) := \Psi^{\gamma_1 h} \circ \Psi^{\gamma_2 h}.$$

Zeigen Sie: das Verfahren hat (mindestens) die Ordnung $p+1$, d.h. zeigen Sie: $\widehat{\Psi}^h(y) - \Phi^h(y) = O(h^{p+2})$.

11.3. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2d \times 2d}$ heißt symplektisch, falls $A^\top J A = J$. Zeigen Sie: die Menge der symplektischen Matrizen bildet eine Gruppe bzgl. der Matrixmultiplikation.

11.4. Zeigen Sie: die Verkettung zweier symplektischer Abbildungen ist wieder symplektisch.

11.5. Zeigen Sie, daß die beiden symplektischen Eulerverfahren

$$\begin{aligned} p_{i+1} &= p_i - h\nabla_q H(p_{i+1}, q_i) && \text{(1a)} \\ q_{i+1} &= q_i + h\nabla_p H(p_{i+1}, q_i) && \text{(1b)} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} p_{i+1} &= p_i - h\nabla_q H(p_i, q_{i+1}) && \text{(2a)} \\ q_{i+1} &= q_i + h\nabla_p H(p_i, q_{i+1}) && \text{(2b)} \end{aligned}$$

symplektisch und von 1. Ordnung sind. Zeigen Sie weiters: Varianten (2) ist die adjungierte Methode von (1).

11.6. Das Störmer-Verlet-Verfahren ergibt sich durch Verkettung der beiden in Aufg. 11.5 vorgestellten symplektischen Eulerverfahren (genauer: es wird zuerst ein Schritt der Länge $h/2$ der Variante (1) und dann ein Schritt der Länge $h/2$ der Variante (2) gemacht). Zeigen Sie: Das Störmer-Verlet-Verfahren ist symplektisch, symmetrisch und von der Ordnung 2. Zeigen Sie weiters: Falls H "separierte" Form hat, d.h. $H(p,q) = T(p) + U(q)$, dann ist das Störmer-Verlet-Verfahren ein *explizites* Verfahren.

11.7. Es soll gezeigt werden, daß Gaußverfahren auf volumenerhaltende diskrete Evolutionen führen können. Wir betrachten hier nur den 2-dimensionalen Fall.

Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$, und es gelte: $\|f(\mathbf{y})\| + \|D_\mathbf{y} f(\mathbf{y})\| \le L$ für alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$. Damit existiert $\Phi^t(\mathbf{y})$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$.

a) Zeigen Sie für den Fall $n = 2$ folgendes Resultat (welches tatsächlich für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt): Für beliebige Matrizen A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} (\det(A + \varepsilon BA) - \det A) = \det A \operatorname{tr} B, \qquad \operatorname{tr} B := \sum_{i=1}^{n} B_{ii}.$$

a) Sei die matrixwertige Funktion $W = W(t, \mathbf{y})$ Lösung die Lösung des AWP

$$\frac{d}{dt} W(t, \mathbf{y}) = Df(\Phi^t(\mathbf{y}))W(t, \mathbf{y}), \qquad W(0, \mathbf{y}) = \mathrm{I} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Hier ist $\mathbf{y}$ also eigentlich nur ein Parameter. Zeigen Sie:

$$\frac{d}{dt}(\det W(t, \mathbf{y})) = \det W(t, \mathbf{y}) \, (\nabla \cdot f)(\Phi^t(\mathbf{y})),$$

wobei für $f(\mathbf{y}) = (f_1(\mathbf{y}), f_2(\mathbf{y}))^\top$ gesetzt wird: $\nabla \cdot f(\mathbf{y}) = \partial_1 f_1(\mathbf{y}) + \partial_2 f_2(\mathbf{y})$.

b) Sei f zusätzlich divergenzfrei, d.h. $\nabla \cdot f(\mathbf{y}) = 0$ für alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$. Dann ist $\det W(t, \mathbf{y}) = \det(D\Phi^t(\mathbf{y}))$ eine Invariante der Evolution Φ^t. Zeigen Sie: wenn man ein Gaußverfahren auf das System

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' &= f(\mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \\ W' &= D_{\mathbf{y}} f(\mathbf{y})W, \qquad W(0) = \mathrm{I} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \end{aligned}$$

anwendet, dann ist die Determinante der W-Komponente eine Invariante der diskreten Evolution (d.h.: schreibt man für das Ergebnis eines Schrittes des Gaußverfahrens $(\mathbf{y}_1, W_1)$, so ist $\det W_1 = \det W_0$).

Bemerkung: Für f mit $\nabla \cdot f = 0$ folgt aus Obigem, daß die Evolution Φ^t volumenerhaltend ist, d.h. für hinreichend kleine h gilt

$$\int_\Omega 1 \, dx = \int_{\Phi^t(\Omega)} 1 \, dx. \tag{3}$$

Wie wir in der Vorlesung sehen werden (Lemma 6.41) folgt aus den obigen Überlegungen auch, daß die diskrete Evolution Ψ^h volumenerhalten ist, d.h.

$$\int_\Omega 1 \, dx = \int_{\Psi^h(\Omega)} 1 \, dx.$$

Insbesondere muß man also gar nicht das Gaußverfahren auf das gekoppelte System für $\mathbf{y}$ *und* W verwenden, sondern es reicht, daß Gaußverfahren für $\mathbf{y}$ zu verwenden.

11.8. Zeigen Sie Satz 6.41 des Skriptes: Betrachten Sie das autonome AWP

$$\mathbf{y}' = f(\mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$$

und $(\mathbf{y}_k)_{k=0}^N$ die Folge, die durch Anwenden eines RK-Verfahrens entsteht. Wenden Sie das gleich RK-Verfahren auf das folgende System an:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' &= f(\mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \\ W' &= Df(\mathbf{y}(t))W, \qquad W(0) = \mathrm{I} \end{aligned}$$

mit Approximation $(\widetilde{\mathbf{y}}_k, W_k)_{k=0}^N$. Zeigen Sie: $(\mathbf{y}_k, D_{\mathbf{y}_0}\mathbf{y}_k) = (\widetilde{\mathbf{y}}_k, W_k)$ für alle k.

Hinweis: Gehen Sie wie im Beweis von Satz 6.41 vor und zeigen Sie, daß die beiden Folgen die gleiche Rekurrenzrelation (und Startwerte) erfüllen.