Serie 12

Besprechnung am Di., 3.6.11

12.1. (**Programmieraufgabe 12.1**) Betrachten Sie das "Keplerproblem" bei dem $\mathbf{p}$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ durch das folgende Hamiltonsche System beschrieben werden:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{p}\|_2^2 - \frac{1}{\|\mathbf{q}\|_2}.$$

Verwenden Sie folgende Anfangswerte:

$$\mathbf{q}(0) = \begin{pmatrix} 1-e \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{p}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \end{pmatrix}, \qquad e = 0.6.$$

Programmieren Sie für dieses System 3 symplektische Verfahren, nämlich die beiden symplektischen Eulerverfahren (siehe Aufg. 11.5 sowie das Störmer-Verlet-Verfahren (siehe Aufg. 11.6) Die Eingabe für diese Verfahren soll die Anzahl N der Schritte, die Schrittweite h sowie die Startwerte $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{q}_0$ sein. Die Rückgabe soll ein Vektor t mit den Zeitpunkten und Vektoren $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ mit den Werten zu den Zeitpunkten t_i sein.

Schreiben Sie ein weiteres Programm, welches die Energieerhaltung der 3 symplektischen Verfahren testet. Machen Sie hierfür (zu den o.g. Startwerten) $2^n N_0$ Schritte der Schrittlänge $h_0 2^{-n}$, wobei $N_0 = 4000$ und $h_0 = 0.05$ und $n = 0, \ldots, 4$. Plotten Sie (doppelt logarithmisch) den Energiefehler über h. Was beobachten Sie? Erklären Sie.

12.2. Wenn ein Schritt eines Einschrittverfahrens symplektisch ist, dann gilt für jedes k:

$$(D_{\mathbf{y}_0}\mathbf{y}_k)^\top J (D_{\mathbf{y}_0}\mathbf{y}_k) = J$$

12.3. Sei $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$. Eine wichtige Klasse von Differentialgleichungen ist von der Form

$$y'' = g(y)$$

Führt man die Variable $z = y'$ ein, so erhält man in der üblichen Weise ein System von ODEs 1. Ordnung:

$$z' = g(y), \qquad y' = z.$$

Solche System können quadratische Invarianten der Form $Q(y, z) = y^\top S z$ haben, wobei $S \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine Matrix ist (z.B. ist der Drehimpuls aus Übung 6.4 des Skriptes von dieser Bauart).

Eine Klasse von numerischen Verfahren sind Nyströmverfahren, von der folgenden Runge-Kutta Form ((y_1, z_1) sind das Ergebnis eines Schrittes des Verfahrens mit Startwert (y_0, z_0)):

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hz_0 + h^2 \sum_{i=1}^{s} \beta_i k_i, \\ z_1 &= z_0 + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i, \\ k_i &= g(y_0 + c_i h z_0 + h^2 \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j), \qquad i = 1, \ldots, s. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie: falls $x^\top S x = 0$ für alle x, dann ist S schiefsymmetrisch, d.h. $S^\top = -S$.

b) Zeigen Sie: $I(y, z) := y^\top S z$ ist eine (quadratische) Invariante genau dann, wenn

$$S \text{ ist schiefsymmetrisch} \qquad \text{und} \qquad x^\top S g(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

c) Es mögen die Koeffizienten b_i, c_i, β_i und a_{ij} die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \beta_i &= b_i(1-c_i), \qquad i=1,\ldots,s \\ b_i(\beta_j - a_{ij}) &= b_j(\beta_i - a_{ji}), \qquad i,j=1,\ldots,s. \end{aligned}$$

Dann gilt: Das obige Nyströmverfahren erhält alle quadratischen Invarianten der Form $I(y,z) = y^\top Sz$. *Hinweis:* überlegen Sie sich, daß S schiefsymmetrisch sein muß und daß $x^\top Sg(x) = 0$ für alle x gelten muß. Es ist ferner zweckmäßig, an geeigneten Stellen mit $Y_i := y_0 + c_i h z_0 + h^2 \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j$ zu arbeiten. Bemerken Sie, daß $Y_i^\top Sg(Y_i) = Y_i^\top Sk_i$ ist.

12.4. Betrachten Sie für glatte Koeffizienten a, b, c den Differentialoperator

$$Lu = -a(x)u'' + b(x)u'. \tag{1}$$

Auf Ω sei ein Gitter definiert mit Knoten $x_i = ih$, $i = 0,\ldots,N$ für $h = 1/N$. Definieren Sie für Gitterfunktionen $u_h = (u_i)_{i=0}^N$ die Operatoren D_h^+, D_h^- durch

$$(D_h^+ u)_i := \frac{u_{i+1}-u_i}{h}, \qquad (D_h^- u)_i := \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \qquad i=1,\ldots,N-1.$$

und die "symmetrische" Diskretisierung L_h durch

$$(L_h u_h)_i = -a(x_i)(D_h^- D_h^+ u_h)_i + b(x_i)\frac{1}{2}\left((D_h^+ u_h)_i + (D_h^- u_h)_i\right), \qquad i=1,\ldots,N-1.$$

a) Zeigen Sie das folgende *diskrete Maximumprinzip*: Sei h so klein, daß

$$a(x_i) \pm \frac{1}{2} h b(x_i) > 0 \qquad \forall i \in \{0,\ldots,N\}. \tag{2}$$

Dann gilt für alle Gitterfunktionen u_h:

$$(L_h u_h)_i \le 0 \qquad \forall i \in \{1,\ldots,N-1\} \qquad \Longrightarrow \qquad \max_{i=0,\ldots,N} u_i \le \max\{u_0, u_N\}.$$

b) Zeigen Sie die Existenz einer Gitterfunktion φ_h mit folgenden Eigenschaften:

$$\varphi_h \ge 0, \qquad L_h \varphi_h \le -1, \qquad \|\varphi_h\|_\infty \le C \quad \text{für ein } C>0 \text{ unabhängig von } h.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $e^{\lambda x}$ für geeignetes $\lambda > 0$.

12.5. Betrachten Sie für $\Omega = (0,1)$ und $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ die Aufgabe

$$-u''(x) + u(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega, \qquad u'(0) = u'(1) = 0.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ seien die Gitterpunkte $x_i = ih$, $i = 0,\ldots,n$. Betrachten Sie eine Diskretisierung $L_h u^h = f_h$, wobei das LGS für u^h die folgende Form[1] hat:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2}(-u_{i-1}^h + 2u_i^h - u_{i+1}^h) + u_i &= f(x_i), \qquad i=1,\ldots,n-1 \\ \frac{2}{h^2}\left(u_0^h - u_1^h\right) + u_0 &= f(x_0), \\ \frac{2}{h^2}\left(-u_{n-1}^h + u_n^h\right) + u_n &= f(x_n). \end{aligned}$$

a) Schreiben Sie das obige LGS in Matrixform $\mathbf{Au} = \mathbf{f}$ und zeigen Sie, daß die Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ die Vektoren $\mathbf{v}^k \in \mathbb{R}^{n+1}$, $k = 0,\ldots,n$ mit Komponenten

$$\mathbf{v}_i^k = \cos(kih\pi), \qquad i=0,\ldots,n$$

sind. Die Eigenwerte sind $\lambda_k = 1 + \frac{2(1-\cos kh\pi)}{h^2}$.

[1] diese Form wird Abschnit 6.3 des Skriptes kurz motiviert

b) Zeigen Sie, daß der Fehler $u^h - [u]_h$ von der Größe $O(h^{1/2})$ ist, wenn er in der l^2-Norm gemessen wird, d.h. mit einer Konstanten $C > 0$ unabhängig von h gilt

$$\sqrt{\sum_{i=0}^{n} |u_i^h - u(x_i)|^2} \leq Ch^{1/2}.$$

Hinweis: Sie dürfen die elementar nachrechenbare Eigenschaft nutzen, daß die Vektoren $\mathbf{v}^k$, $k = 0, \ldots, n$ orthogonal zueinander sind bzgl. des euklidischen Skalarprodukts. Für die Berechnung des Konsistenzfehlers dürfen Sie annehmen, daß die exakte Lösung u die Differentialgleichung auch in den Endpunkten x_0 und $x_n = 1$ erfüllt.

Bemerkung: tatsächlich kann man mit den gleichen Techniken das schärfere Resultat $O(h^1)$ für den Fehler beweisen.

12.6. (**Programmieraufgabe 12.6**) Betrachten Sie für $\Omega = (0,1)^2$ das Problem

$$Lu := -\Delta u = f \quad \text{auf } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{3}$$

Das regelmäßige Gitter $\overline{\Omega}_h$ wird durch die Knoten $x_{ij} := (ih, jh)$, $i, j = 0, \ldots, n+1$ mit $h = 1/(n+1)$ beschrieben. Der 5-Punkt-Stern und der 9-Punkt-Stern sind zwei Diskretisierungen von $-\Delta$, die Approximationen an $(-\Delta u)(x_{ij})$ für die inneren Knoten (d.h. $1 \leq i, j \leq n$) darstellen[2]:

$$(L_h^5 u^h)(x_{ij}) = \frac{1}{h^2}\left(4u_{i,j}^h - u_{i+1,j}^h - u_{i-1,j}^h - u_{i,j+1}^h - u_{i,j-1}^h\right),$$

$$(L_h^9 u^h)(x_{ij}) = \frac{1}{6h^2}\left(20u_{i,j}^h - 4u_{i+1,j}^h - 4u_{i-1,j}^h - 4u_{i,j+1}^h - 4u_{i,j-1}^h - u_{i-1,j-1}^h - u_{i-1,j+1}^h - u_{i+1,j-1}^h - u_{i+1,j+1}^h\right).$$

Diese Diskretisierungen werden kompakt wie in Fig. 1 dargestellt notiert. Als Gleichungssystem für die Approximationen u_{ij}^h in den inneren Knoten x_{ij} betrachten Sie 3 Fälle:

$$\begin{aligned}
(L_h^5 u^h)(x_{ij}) &= f(x_{ij}), \qquad 1 \leq i, j \leq n, \\
(L_h^9 u^h)(x_{ij}) &= f(x_{ij}), \qquad 1 \leq i, j \leq n, \\
(L_h^9 u^h)(x_{ij}) &= \frac{1}{12}\left[8f(x_{ij}) + f(x_{i+1,j}) + f(x_{i-1,j}) + f(x_{i,j-1}) + f(x_{i,j+1})\right], \qquad 1 \leq i, j \leq n.
\end{aligned}$$

Schreiben Sie 2 Matlabprogramme mit den Signaturen

$$A9 = \texttt{nine\_point\_stencil}(n) \qquad\qquad A5 = \texttt{five\_point\_stencil}(n),$$

welche die Matrizen $A9$ und $A5 \in \mathbb{R}^{N \times N}$ mit $N = n^2$ zurückgeben, die zu den Diskretisierungen L_h^5 und L_h^9 gehören. Verwenden `sparse`-Matrizen, d.h. legen Sie $A9$ und $A5$ mit `spalloc(N,N,9*N)` bzw. `spalloc(N,N,5*N)` an. Verwenden Sie für die Nummerierung der (inneren) Knoten die lexikographische Nummerierung, d.h. der Doppelindex (i,j) mit $1 \leq i, j \leq n$ hat die Nummer $\nu(i,j) = (i-1)n + j$. Sie dürfen annehmen, daß $n > 2$ ist.

Schreiben Sie weiters eine Routine mit der Signatur

$$[\texttt{u5}, \texttt{u9\_4}, \texttt{u9\_2}] = \texttt{poisson}(n, f)$$

wobei f ein *function handle* für eine Funktion $z = f(x,y)$ ist. Die Rückgabewerte sollten die Lösungsvektoren sein, die zu den 3 obigen Diskretisierungen gehören.

Wenden Sie `poisson` für $f(x,y) = 2\pi^2 \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ an (dann ist die exakte Lösung des Problems $u(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$) und Schrittweiten $h = 2^{-n}$, $n = 1, \ldots, 7$. Plotten Sie für die drei Diskretisierungen den Fehler (doppelt logarithmisch) gegen h. Welche Konvergenzverhalten beobachten Sie?

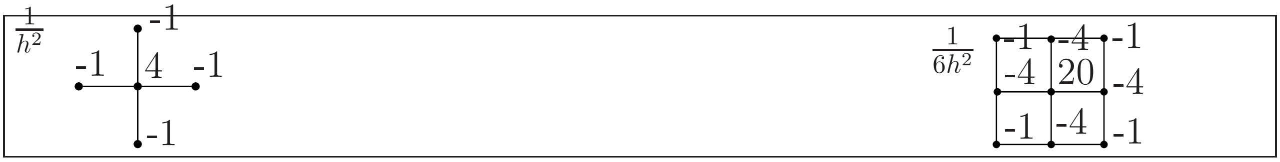

Abbildung 1: 5-Punkt (links) und 9-Punkt-Stern (rechts)

[2] der 5-Punkt-Stern ist der in VO diskutierte