MATHEMATISCHE STATISTIK

http://www.statistik.tuwien.ac.at/lv-guide VO: Prof. Felsenstein SS 2013

ÜBUNGSBLATT 1

1) Man zeige die bedingte *Markov-Ungleichung*: Für $\eta : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ monoton wachsend und eine Stochastische Größe X und eine sub-σ-Algebra $\mathcal{F}$ von $\mathcal{A}$ gilt

$$\mathbf{P}[|X| > \epsilon|\mathcal{F}] \;\leq\; \frac{\mathbb{E}[\eta(|X|)|\mathcal{F}]}{\eta(\epsilon)} \;.$$

2) Die 2-dimensionale Stochastische Größe (X, Y) habe die Dichtefunktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } \; 0 < x \leq 1, \; 0 < y \leq x \\ 0 & \text{sonst} \; . \end{cases}$$

Man gebe die bedingten Dichten von $X|Y = y$ bzw. $Y|X = x$ und die zugehörigen Erwartungswerte $\mathbb{E}(X|Y = y)$ und $\mathbb{E}(Y|X = x)$ an.

3) (Wald'sche Identität) Es sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge reelwertiger, unabhängiger und identisch verteilter stochastischer Größen und N eine von $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängige stochastische Größe auf $\mathbb{N}$. Die (stochastische) Summe sei $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$.

a) Man zeige

$$\mathbb{E}(S) \;=\; \mathbb{E}(N).\, \mathbb{E}(X_1).$$

b) Für eine Folge Poisson-verteilter Größen $X_i \sim P_\eta$ und $N \sim P_\gamma$ berechne man $\mathbf{P}[S = 0]$.

4) X_1 sei Binomialverteilt $X_1 \sim B_{n,p}$. X_2 ist unabhängig von X_1 und ebenfalls Binomialverteilt $X_2 \sim B_{m,p}$ mit derselben Eintrittswahrscheinlichkeit p. Welche Verteilung (Punktwahrscheinlichkeiten) hat $X_1|X_1 + X_2$?

5) Man zeige, daß der Quotient

$$\frac{V/k}{W/l}$$

für unabhängige stochastische Größen $V \sim \chi_k^2$ und $W \sim \chi_l^2$ einer $F_{k,l}$-Verteilung folgt. (Satz 1.3 der Vorlesung)

6) Die stochastische Größen $X \sim N(0,1)$ und $V \sim \chi_k^2$ seien unabhängig. Man zeige

$$\frac{X}{\sqrt{V/k}} \;\sim\; t_k.$$

(Satz 1.4 der Vorlesung)