MULTIVARIATE STATISTIK

http://www.statistik.tuwien.ac.at/lv-guide

Blatt 1 Wintersemester 2012/13

1) Es soll gezeigt werden, daß die *Helmert-Matrix* orthogonal ist.

2) Die quadratische Matrix A sei idempotent. Welche Werte kommen für die Eigenwerte λ_i in Frage?

3) Für die k-dimensionale Einheitsmatrix I_k und den Vektor $e = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^k$ zeige man, daß die Matrix

$$M = I_k - \frac{1}{k}\, e\, e^\top$$

(*mean centering matrix*) idempotent ist.

4) Für $x, x_0 \in \mathbb{R}^2$ wird durch

$$(x - x_0)^\top \Sigma^{-1} (x - x_0) = d^2$$

eine (Iso-Distanz) Ellipse gegeben. Dabei sei

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

Man zeichne für $d = 4, \rho = 0.5$ bzw. für $d = 1, \rho = -0.75$ bei $x_0 = (0, 0)$ diese Ellipse.

5) Man zeige das *Binomial-Inverse Theorem*:

$$(A + UBV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}UB(B + BVA^{-1}UB)^{-1}BVA^{-1}.$$

Dabei sind A, U, B, V Matrizen geeigneter Dimension und A und B bzw. $B + BVA^{-1}UB$ invertierbar.

6) (*Inverse einer partionierten Matrix*)
Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei partitioniert,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $A_{11} \in \mathbb{R}^{k\times k}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{k\times l}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{l\times k}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{l\times l}$ und $n = k + l$. Für die entsprechend (gleiche Dimensionen der Submatrizen) partitionierte Inverse

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

gilt:

$$\begin{aligned} B_{11} &= (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} \\ B_{22} &= (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \\ B_{12} &= -A_{11}^{-1}A_{12}B_{22} \\ B_{21} &= -A_{22}^{-1}A_{21}B_{11}. \end{aligned}$$