# MULTIVARIATE STATISTIK

http://www.statistik.tuwien.ac.at/lv-guide

BLATT 2 — WINTERSEMESTER 2012/13

**7)** Die zweidimensionale Dichte

$$f(x,y) \; = \; 1 \; + \; \alpha(2x-1)(2y-1) \qquad \text{für } 0 < x, y < 1$$

beschreibt die *Morgenstern*-Verteilung mit $-1 \leq \alpha \leq 1$. Man zeige, daß für jedes $\alpha$ dieselbe Randverteilung von $X$ bzw. $Y$ entsteht.

**8)** Die Matrix $\Sigma$ ist die Kovarianzmatrix des stochastischen Vektors $X \in \mathbb{R}^k$. Es soll der *Verschiebungssatz* für die Kovarianzmatrix formuliert und bewiesen werden.

**9)** Die zweidimensionale stochastische Größe $X, Y$ ist mit folgenden Punktwahrscheinlichkeiten auf den Punkten $x = 0, 10$ und $y = -1, 1, 3$ verteilt:

| $x/y$ | -1 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.2 | 0.2 | 0.1 |
| 10 | 0.3 | 0.2 | 0 |

Man gebe die Korrelationsmatrix an und berechne die Eigenwerte und die Determinante.

**10)** Die Matrix $R$ sei die *Korrelationsmatrix* des stochastischen Vektors $X \in \mathbb{R}^k$. Ist $R$ positiv definit (bzw. positiv semidefinit)?

**11)** Für eine positiv definite Korrelationsmatrix $R$ mit Eigenwerten $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_k$ soll

$$\lambda_1 \leq 1 \leq \lambda_k$$

gezeigt werden. Gilt für eine Korrelationsmatrix $|R| \leq 1$ ?

**12)** Eine *multivariate Poissonverteilung* des Vektors $X = (X_1, \ldots, X_k) \in \mathbb{N}^k$ (i.Z. $MP_{\theta_0,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k}$ ) hat die Punktwahrscheinlichkeiten (für $k = 2$)

$$\mathbf{P}[X_1 = x, X_2 = y] \; = \; e^{-(\theta_0+\theta_1+\theta_2)} \frac{\theta_1^x}{x!} \frac{\theta_2^y}{y!} \sum_{i=0}^{\min(x,y)} \binom{x}{i} \binom{y}{i} \; i! \; \left(\frac{\theta_0}{\theta_1 \theta_2}\right)^i$$

für $x, y \in \mathbb{N}$. Man zeige, daß diese Verteilung aus unabhängigen Poissonverteilten Größen $Z_i \sim P_{\theta_i}$ für $i = 0, 1, 2$ durch

$$X_1 \; = Z_1 + Z_0 \qquad \text{und} \qquad X_2 \; = Z_2 + Z_0$$

entsteht.