MULTIVARIATE STATISTIK

http://www.statistik.tuwien.ac.at/lv-guide

BLATT 5 WINTERSEMESTER 2012/13

25) Der Vektor $X = (X_1, X_2)^\top$ ist normalverteilt mit $X_1 \in \mathbb{R}^p$ und $X_2 \in \mathbb{R}^q$ und entsprechender Aufteilung des Mittelvektors $\mu = (\mu_1, \mu_2)^\top$ und der Kovarianzmatrix

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}.$$

Man bestimme die Verteilung von X_1 und $X_{2.1} = X_2 - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}X_1$. Sind X_1 und $X_{2.1}$ unabhängig?

26) Für die dreidimensionale normalverteilte Größe (X, Y, Z) gilt $X \sim N(1, 4)$ und

$$Y|Z \sim N(2Z, 24) \qquad \text{und} \qquad Z|X \sim N(2X + 3, 14)$$

Die Korrelation zwischen X und Y ist $\rho_{X,Y} = 0.5$. Man bestimme die Verteilung von (X, Y, Z) und berechne die partielle Korrelation zwischen X und Y bei gegebenem Z.

27) Zu $X \sim N(\mu, \Sigma)$ sei

$$Y = \frac{a^\top (X - \mu)}{\sqrt{a^\top \Sigma a}}.$$

i) Man zeige, daß für einen festen Vektor $a \neq 0$ die Verteilung von Y eine Standardnormalverteilung ist.
ii) Ist $Y \sim N(0, 1)$ auch dann, wenn a ein von X unabhängiger stochastischer Vektor mit $\mathbf{P}[a^\top \Sigma a = 0] = 0$ ist ?

28) Die Dirichlet-Verteilung $(X_1, \ldots, X_k) \sim Dir(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1})$ kann bei $\alpha := \alpha_i \to \infty$ durch eine multivariate Normalverteilung approximiert werden. Die Approximation soll mit der Darstellung der Dirichlet-Verteilung aus unabhängigen Gamma-Verteilungen konstruiert werden.

29) Die folgenden Beobachtungen stammen von einer bivariaten Normalverteilung

x_i	4.2	3.3	6.2	2.2	8.9	5.0	4.1	3.1
y_i	7.1	8.9	13.2	7.5	18.0	12.0	13.8	6.4

Man gebe einen 95% Konfidenzbereich für den Mittelvektor $\mu = (\mu_x, \mu_y)^\top$ an, wenn
i) die Kovarianzmatrix bekannt ist

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 24 \end{pmatrix},$$

ii) die Kovarianzmatrix geschätzt wird.
Es soll eine Zeichnung beider Konfidenzbereiche (Ellipsen) erstellt werden.

30) Die Matrix M sei Wishart-verteilt $Wis(\Sigma, m)$. Man zeige, daß

$$\frac{a^\top M a}{a^\top \Sigma a} \sim \chi^2_m$$

wenn $a \neq 0$ ein fester Vektor oder ein von M unabhängiger stochastischer Vektor mit $\mathbf{P}[a^\top \Sigma a = 0] = 0$ ist. (Vergleiche Beispiel 27).