BAYES - STATISTIK

http://www.statistik.tuwien.ac.at/lv-guide

BLATT 9 SOMMERSEMESTER 2010

49) Man verifiziere mittels Simulation die Approximation der a-posteriori Verteilung bei großem Stichprobenumfang durch eine geeignete Normalverteilung für folgende Modelle:
a) Binomialverteilte Beobachtung mit konjugierter a-priori Verteilung
b) Exponentialverteilte Beobachtungen mit konjugierter a-priori Verteilung.
Man generiere Stichproben mit der Anzahl $n = 5$, $n = 20$ und $n = 100$ und vergleiche die exakte a-posteriori Dichte mit der approximierenden Dichte der Normalverteilung.

50) Man gebe ein Beispiel für ein Modell mit konjugierter a-priori Verteilung, wobei die a-posteriori Verteilung nicht durch eine Normalverteilung approximiert werden kann.

51) Die Seitenlängen X_1, X_2 einer quadratischen Fläche seien unabhängig und beide normalverteilt $N(\mu, \sigma^2)$. Für die Bestimmung der Fläche $\theta = \mu^2$ stehen vier Schätzfunktionen zur Wahl:

$$T_1 = X_1^2, \qquad T_2 = \left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right)^2,$$

$$T_3 = \frac{X_1^2 + X_2^2}{2}, \qquad T_4 = X_1.X_2\ .$$

Man bestimme das Risiko jeder dieser Schätzfunktion bei quadratischem Verlust. Welche Entscheidung hat kleinstes Risiko?

52) Die Verlustfunktion $L(\theta, \delta)$ sei strikt konvex in δ. Die beiden unterschiedlichen Entscheidungen δ_1 und δ_2 haben gleiche Risikofunktionen,

$$R(\theta, \delta_1) \;=\; R(\theta, \delta_2)$$

Man zeige, daß δ_1 nicht zulässig sein kann.

53) Die randomisierten Entscheidungsfunktionen seien in $\mathcal{D}^*$ und $\mathcal{D}$ sei die Menge der nicht-randomisierten Entscheidungen. Man begründe, daß für jede a-priori Verteilung π das Bayes-Risiko auf $\mathcal{D}^*$ und $\mathcal{D}$ gleich ist, also

$$\inf_{\delta \in \mathcal{D}} r(\pi, \delta) \;=\; \inf_{\delta^* \in \mathcal{D}^*} r(\pi, \delta^*).$$

54) Die Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ sei Poissonverteilt $X_i \sim P_\theta$. Man bestimme das *Bayes-Risiko* für die Schätzfunktion $\overline{X}_n$ unter einer a-priori Gamma-Verteilungen $\gamma(a, b)$ für die Verlustfunktionen

$$L_1(\theta, d) \;=\; \frac{(\theta - d)^2}{\theta} \qquad \text{bzw.} \qquad L_2(\theta, d) \;=\; (\theta - d)^2\ .$$