

BAYES - STATISTIK

<http://www.statistik.tuwien.ac.at/lv-guide>

BLATT 9

SOMMERSEMESTER 2012

- 49) Man verifiziere mittels Simulation die Approximation der a-posteriori Verteilung bei großem Stichprobenumfang durch eine geeignete Normalverteilung für folgende Modelle:
- a) Binomialverteilte Beobachtung mit konjugierter a-priori Verteilung
 - b) Exponentialverteilte Beobachtungen mit konjugierter a-priori Verteilung.
- Man generiere Stichproben mit der Anzahl $n = 5$, $n = 20$ und $n = 100$ und vergleiche die exakte a-posteriori Dichte mit der approximierenden Dichte der Normalverteilung.

- 50) Man gebe ein Beispiel für ein Modell mit konjugierter a-priori Verteilung, wobei die a-posteriori Verteilung nicht durch eine Normalverteilung approximiert werden kann.

- 51) Die Seitenlängen X_1, X_2 einer quadratischen Fläche seien unabhängig und beide normalverteilt $N(\mu, \sigma^2)$. Für die Bestimmung der Fläche $\theta = \mu^2$ stehen vier Schätzfunktionen zur Wahl:

$$T_1 = X_1^2, \quad T_2 = \left(\frac{X_1 + X_2}{2} \right)^2,$$
$$T_3 = \frac{X_1^2 + X_2^2}{2}, \quad T_4 = X_1 \cdot X_2.$$

Man bestimme das Risiko jeder dieser Schätzfunktion bei quadratischem Verlust. Welche Entscheidung hat kleinstes Risiko?

- 52) Die Verlustfunktion $L(\theta, \delta)$ sei strikt konvex in δ . Die beiden unterschiedlichen Entscheidungen δ_1 und δ_2 haben gleiche Risikofunktionen,

$$R(\theta, \delta_1) = R(\theta, \delta_2)$$

Man zeige, daß δ_1 nicht zulässig sein kann.

- 53) Die randomisierten Entscheidungsfunktionen seien in \mathcal{D}^* und \mathcal{D} sei die Menge der nicht-randomisierten Entscheidungen. Man begründe, daß für jede a-priori Verteilung π das Bayes-Risiko auf \mathcal{D}^* und \mathcal{D} gleich ist, also

$$\inf_{\delta \in \mathcal{D}} r(\pi, \delta) = \inf_{\delta^* \in \mathcal{D}^*} r(\pi, \delta^*).$$

- 54) Die Stichprobe X_1, \dots, X_n sei Poissonverteilt $X_i \sim P_\theta$. Man bestimme das *Bayes-Risiko* für die Schätzfunktion \bar{X}_n unter einer a-priori Gamma-Verteilungen $\gamma(a, b)$ für die Verlustfunktionen

$$L_1(\theta, d) = \frac{(\theta - d)^2}{\theta} \quad \text{bzw.} \quad L_2(\theta, d) = (\theta - d)^2.$$