BAYES - STATISTIK

http://www.statistik.tuwien.ac.at/lv-guide

BLATT 10 — SOMMERSEMESTER 2014

55) Für das Modell aus Beispiel 54 bestimme man die Bayes-Entscheidung für $L_1(\theta, d)$ bzw. $L_2(\theta, d)$. Ist $\overline{X}_n$ die Mini-Max-Entscheidung für eine der beiden Verlustfunktionen?

56) Es liegen 2 Beobachtungen X_1, X_2 einer Verteilung mit

$$P_\theta[X = \theta - 1] \;=\; P_\theta[X = \theta + 1] \;=\; \frac{1}{2}$$

und $\theta \in \mathbb{R}$ vor. Die Verlustfunktion sei $L(\theta, d) \;=\; 1 \;-\; \mathbb{I}_\theta(d)$.
Man betrachte die (nicht-randomisierten) Entscheidungsfunktionen $T_1 = (X_1 + X_2)/2$, sowie $T_2 = X_1 + 1$ und die randomisierte Entscheidung δ mit

$$\delta(x_1, x_2; t) \;=\; \begin{cases} \boldsymbol{\delta}(\frac{x_1+x_2}{2}; t) & \text{wenn } x_1 \neq x_2 \\ \frac{1}{2}(\boldsymbol{\delta}(x_1 - 1; t) + \boldsymbol{\delta}(x_1 + 1; t)) & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $\boldsymbol{\delta}(x, t)$ das Dirac-Maß in x bezeichnet. Man berechne die Risikofunktionen für diese 3 Entscheidungen. Ist eine Entscheidung davon gleichmäßig besser?

57) Unter den Annahmen von Beispiel 56 betrachte man die nicht-randomisierte Entscheidung $d(x_1, x_2)$, die dem Erwartungswert der randomisierte Entscheidung δ entspricht, und berechne die Risikofunktion von d. Ist d (wie bei konvexen Verlustfunktionen) unter dieser Verlustfunktiont nicht schlechter als δ ?
Man kommentiere das Ergebnis bezogen auf die Aussage in Beispiel 53.

58) Die Beobachtungen $x_1 = -2.4$ $\quad x_2 = 1.2$ $\quad x_3 = 0.8$ $\quad x_4 = 1.5$ seien normalverteilt $N(0, \sigma^2)$. Die Präzision $\tau = \frac{1}{\sigma^2}$ ist a-priori Gamma-verteilt $\gamma(2, 3)$. Man berechne die a-posteriori Verteilung und den Bayes-Schätzer unter der Verlustfunktion

$$L(\tau, a) = \tau(\tau - a)^2.$$

59) Als Verlustfunktion für die Parameterschätzung eignen sich auch Verlustmaße, die gesamte Dichte betreffend. Solche Verlustmaße sind etwa
ENTROPIE-DISTANZ oder KULLBACK-LEIBLER DIVERGENZ:

$$L_E(\theta, d) \;:=\; \mathbb{E}_{X|\theta} \; \log\left(\frac{f(x|\theta)}{f(x|d)}\right)$$

HELLINGER-DISTANZ:

$$L_H(\theta, d) \;:=\; \frac{1}{2}\, \mathbb{E}_{X|\theta} \left(\sqrt{\frac{f(x|d)}{f(x|\theta)}} \;-1\right)^2 .$$

Bei normalverteilten Beobachtungen $X_i \sim N(\theta, 1)$ und $\theta \sim N(m, d^2)$ bestimme man L_E bzw. L_H. Dann soll der Bayes-Schätzer unter beiden Verlusten bestimmt werden (es genügt eine Beobachtung zu betrachten).

60) Von frequentistischen Schätzfolgen wird beispielsweise asymptotische Erwartungstreue und Konsistenz als Qualtitätskriterium verlangt. Man diskutiere Voraussetzungen, sodaß Bayes-Schätzer (unter quadratischem Verlust) ebenfalls diese Eigenschaften besitzen.
Man finde ein Beispiel eines Bayes-Schätzers, der weder asymptotisch erwartungstreu noch konsistent ist.