BLATT 11 SOMMERSEMESTER 2014

61) Zu einer normalverteilten Stichprobe $X_i \sim N(\theta, 1)$ mit konjugierter a-priori sei $\theta|X \sim N(m^*, d^{*2})$ die a-posteriori. Für den *asymmetrischen quadratischen Verlust*

$$L(\theta, d) \;=\; \begin{cases} \omega(\theta - d)^2 & \text{wenn } \; d < \theta \\ (1-\omega)(\theta - d)^2 & \text{sonst} \end{cases}$$

soll der Bayes-Schätzer angegeben werden. Man betrachte den Fall $m^* = 0, d^* = 1$.

62) Die Verlustfunktion mit festen $\epsilon_1 \geq 0, \epsilon_2 \geq 0$ sei

$$L(\theta, d) \;=\; 1 \;-\; 1\!\!1_{d-\epsilon_1, d+\epsilon_2}(\theta) \tag{L-62}$$

Der Modus der (stetigen) a-posteriori Verteilung ist in vielen Fällen die Bayes-Entscheidung für diese Verlustfunktion. Man gebe Beispiele an (Typen von a-posteriori Verteilungen) für die der Modus die Bayes-Entscheidung ist.

63) Für die Verlustfunktion (L-62) bestimme man die Bayes-Entscheidung für $\epsilon_1 = \epsilon_2$ und eine
i) Poissonverteilte Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ mit konjugierter a-priori Verteilung $\theta \sim \gamma(a, b)$;
ii) Gleichverteilte Stichprobe mit konjugierter Pareto a-priori Verteilung .

64) Eine Beobachtung $x = 28$ einer Bionomialverteilten Größe $X \sim B_{n,\theta}$ mit $n = 42$ liege vor. Man teste die Hypothese $H_0 : \theta = 0.5$ (unter $0 - 1$ Verlust), wenn
i) eine konjugierte $\beta(2, 3)$ a-priori bzw.
ii) die Jeffreys a-priori eingesetzt wird.

65) Man entwickle den Bayes-Test für eine normalverteilten Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ mit $X_i \sim N(\theta, 1)$ und konjugierter a-priori $\theta \sim N(m, d)$ für die
i) einseitige Hypothese $H_0 : \theta \leq \theta_0$ gegen $H_1 : \theta > \theta_0$
ii) und die zweiseitige Hypothese $H_0 : \theta = \theta_0$ gegen $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

66) Von der normalverteilten Größe (X, Y) mit $Var(X) = 12$ und $Var(Y) = 7$ liegen $n = 15$ *paarweise* Beobachtungen vor, die $\overline{x} = 35$ und $\overline{y} = 29$ ergeben. A-priori sind $\mu_x \sim N(30, 2)$ und $\mu_y \sim N(30, 3)$ unabhängig. Man gebe den Test auf gleiche Mittel, d.h. die Hypothese $H_0 : \mu_x = \mu_y$ gegen $H_1 : \mu_x \neq \mu_y$, an. Ist für diesen Test auch die Verwendung einer nichtinformativen a-priori möglich?