BAYES - STATISTIK

http://www.statistik.tuwien.ac.at/lv-guide

BLATT 11 SOMMERSEMESTER 2019

59) Die randomisierten Entscheidungsfunktionen seien in $\mathcal{D}^*$ und $\mathcal{D}$ sei die Menge der nicht-randomisierten Entscheidungen. Man begründe, daß für jede a-priori Verteilung π für das Bayes-Risiko auf $\mathcal{D}^*$ und $\mathcal{D}$ gilt

$$\inf_{\delta \in \mathcal{D}} r(\pi, \delta) \;=\; \inf_{\delta^* \in \mathcal{D}^*} r(\pi, \delta^*).$$

Sind also die randomisierten Entscheidungsfunktionen doch entbehrlich?

60) Es liegen 2 Beobachtungen X_1, X_2 einer Verteilung mit

$$P_\theta[X = \theta - 1] \;=\; P_\theta[X = \theta + 1] \;=\; \frac{1}{2}$$

und $\theta \in \mathbb{R}$ vor. Die Verlustfunktion sei $L(\theta, d) \;=\; 1 \;-\; \mathbb{1}_\theta(d)$.
Man betrachte die (nicht-randomisierten) Entscheidungsfunktionen $T_1 = (X_1 + X_2)/2$, sowie $T_2 = X_1 + 1$ und die randomisierte Entscheidung δ mit

$$\delta(x_1, x_2; t) \;=\; \begin{cases} \boldsymbol{\delta}(\frac{x_1 + x_2}{2}; t) & \text{wenn } x_1 \neq x_2 \\ \frac{1}{2}(\boldsymbol{\delta}(x_1 - 1; t) + \boldsymbol{\delta}(x_1 + 1; t)) & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $\boldsymbol{\delta}(x, t)$ das Dirac-Maß in x bezeichnet. Man berechne die Risikofunktionen für diese 3 Entscheidungen. Ist eine Entscheidung davon gleichmäßig besser?

61) Unter den Annahmen von Beispiel 60 betrachte man die nicht-randomisierte Entscheidung $d(x_1, x_2)$, die dem Erwartungswert der randomisierte Entscheidung δ entspricht, und berechne die Risikofunktion von d. Ist d (wie bei konvexen Verlustfunktionen) unter dieser Verlustfunktiont nicht schlechter als δ ?
Man kommentiere das Ergebnis bezogen auf die Aussage in Beispiel 59.

62) Eine Beobachtung $x = 28$ einer Bionomialverteilten Größe $X \sim B_{n,\theta}$ mit $n = 42$ liege vor. Man teste die Hypothese $H_0 : \theta = 0.5$ (unter $0 - 1$ Verlust), wenn
i) eine konjugierte $\beta(2, 3)$ a-priori bzw.
ii) die Jeffreys a-priori eingesetzt wird.

63) Man entwickle den Bayes-Test für eine normalverteilten Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ mit $X_i \sim N(\theta, 1)$ und konjugierter a-priori $\theta \sim N(m, d)$ für die
i) einseitige Hypothese $H_0 : \theta \leq \theta_0$ gegen $H_1 : \theta > \theta_0$
ii) und die zweiseitige Hypothese $H_0 : \theta = \theta_0$ gegen $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

64) Von der normalverteilten Größe (X, Y) mit $Var(X) = 12$ und $Var(Y) = 7$ liegen $n = 15$ *paarweise* Beobachtungen vor, die $\overline{x} = 35$ und $\overline{y} = 29$ ergeben. A-priori sind $\mu_x \sim N(30, 2)$ und $\mu_y \sim N(30, 3)$ unabhängig. Man gebe den Test auf gleiche Mittel, d.h. die Hypothese $H_0 : \mu_x = \mu_y$ gegen $H_1 : \mu_x \neq \mu_y$, an. Ist für diesen Test auch die Verwendung einer nichtinformativen a-priori möglich?

65) Zur gleichverteilten Stichprobe $X_i \sim U_{\theta_1,\theta_2}$ mit konjugierter a-priori (bilaterale Pareto) soll ein gemeinsamer 95% HPD-Bereich für (θ_1, θ_2) skizziert werden. Man simuliere eine Stichprobe vom Umfang $n = 20$ und verwende eine geeignete a-priori für die Darstellung des HPD-Bereichs.

66) Für stetig gleichverteilte Stichprobe $X_i \sim U_{0,\theta}$ mit konjugierter a-priori Pareto-Verteilung soll der Bayes-Test für die
i) einseitige Hypothese $H_0 : \theta \leq \theta_0$ bzw.
ii) beidseitige Hypothese $H_0 : \theta = \theta_0$ gegen $H_1 : \theta \neq \theta_0$
bestimmt werden.

67) Zum linearen Regressionsmodell $X = F\theta + \epsilon$ mit normalverteilten Störungen ϵ gebe man die *Jeffreys*-a-priori für (θ, τ) an und bestimme dazu den Bayes-Schätzer des Regressionsmodells.