

BAYES - STATISTIK

<http://mstoch.tuwien.ac.at/lv-guide>

BLATT 4

SOMMERSEMESTER 2019

- 19) Zum Modell aus Beispiel 16 soll eine Gleichverteilung $\pi \sim U_{0,5}$ als a-priori Verteilung verwendet werden. Man berechne (numerisch) die a-posteriori Verteilung nach der a-priori Gleichverteilungannahme und stelle die Dichte graphisch dar.
- 20) Man bestimme Mischungsgewichte p_i , sodaß die Mischungsverteilung nach Beispiel 16 möglichst geringen Abstand zur Gleichverteilung $U_{0,5}$ aus Beispiel 19 hat. (Die Definition "Abstand" ist frei (begründbar) wählbar.) Dann vergleiche man die entstehende a-posteriori aus der Mischungsverteilung zur a-posteriori nach Beispiel 19.

- 21) Die Datendichte entspreche einer natürlich parametrisierten Exponentialfamilie

$$f(x|\theta) = e^{\theta T(x) - \psi(\theta)} h(x) = C(\theta) e^{\theta T(x)} h(x).$$

Man gebe die konjugierte a-priori für θ und den Up-dating Algorithmus der Hyperparameter an.

- 22) Man gebe zum Modell aus Beispiel 21 die a-posteriori zu einer festen Mischung von a-priori Verteilung an, man bestimme also die a-posteriori Mischungsgewichte und konjugierten Einzelverteilungen. Man kann den Vorgang beispielsweise an Hand der Exponentialverteilung beschreiben.

BEMERKUNG: (Satz von LeCam) *Zu einer a-priori π auf dem natürlichen Parameterraum einer Exponentialfamilie existiert für beliebiges $\epsilon > 0$ eine Mischungsverteilung $\tilde{\pi}$ von konjugierten Einzelverteilungen, sodaß für die Prohorov-Metrik*

$$d^P(\pi, \tilde{\pi}) < \epsilon$$

gilt.

- 23) Die Beobachtungen X_i sind normalverteilt mit unterschiedlichen Mittelwerten bzw. Varianzen. Es soll die konjugierte a-priori Verteilung und der Up-Dating Algorithmus für den Parameter θ angegeben werden, wenn $X_i \sim N(\theta, \sigma_i^2)$ bei bekannten Varianzen σ_i^2 ist.
- 24) Man wiederhole Aufgabe 23, wenn $X_i \sim N(\mu_i, \frac{1}{\theta})$ bei bekannten Mittelwerten μ_i , also wenn der Parameter die Präzision ist.