4.Übung Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 1 SS2012

1. μ und ν seien Maße auf dem Ring $\mathfrak{R}$. Zeigen Sie
   (a) $(\mu+\nu)^* = \mu^* + \nu^*$,
   (b) $\mathfrak{M}_{\mu^*} \cap \mathfrak{M}_{\nu^*} \subseteq \mathfrak{M}_{\mu^*+\nu^*}$.

2. Welche der folgenden Funktionen sind äußere Maße?
   (a) $\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{für } A = \emptyset, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$
   (b) $\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{für } |A| <= \aleph_0, \\ \infty & \text{für } |A| > \aleph_0 \end{cases}.$
   (c) $\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{für } |A| < \infty, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$
   (d) $\mu^*(A) = \begin{cases} \frac{|A|}{|A|+1} & \text{falls } |A| < \infty, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$

3. Zeigen Sie, dass
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ x+1 & \text{für } 0 \le x < 1, \\ 2x^2 & \text{für } 1 \le x < 2, \\ 9 & \text{für } x \ge 2, \end{cases}$$
eine Verteilungsfunktion ist und bestimmen Sie das zugehörige Maß der folgenden Mengen: $\{1, 2\}$, $[1, 2]$, $(1, 2)$, $\mathbb{Q}$, $(-\infty, 1.5)$, $\mathbb{R}$.

4. $\mathfrak{C}$ sei ein beliebiges Mengensystem mit $\emptyset \in \mathfrak{C}$, $f : \mathfrak{C} \to [0, \infty]$ eine beliebige Funktion mit $f(\emptyset) = 0$.
   Zeigen Sie, dass
$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} f(B_n) : B_n \in \mathfrak{C}, A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\}$$
eine äußere Maßfunktion ist.

5. $(\mu_i^*, i \in I)$ sei eine Familie von äußeren Maßen. Zeigen Sie, dass
$$\mu^* = \sup_{i\in I} \mu_i^*$$
ebenfalls ein äußeres Maß ist.

6. Die Cantormenge ist
$$C = \{\sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n} : a_n \in \{0, 2\}\}.$$

Man kann Sie auch erhalten, indem aus dem Intervall $[0,1]$ das mittlere Drittel enfernt wird und dann jeweils aus den verbleibenden Teilintervallen wieder, formal:

$$C_0 = [0,1],$$

$$C_n = \bigcup_{i=1}^{2^n} [a_{ni}, b_{ni}],$$

mit

$$a_{n+1,2i-1} = a_{ni},$$

$$b_{n+1,2i-1} = \frac{2a_{ni} + b_{ni}}{3},$$

$$a_{n+1,2i} = \frac{a_{ni} + 2b_{ni}}{3}$$

und

$$b_{n+1,2i} = b_{ni}.$$

Zeigen Sie, dass C überabzählbar ist und $\lambda(C) = 0$ gilt.

7. Für $A \subseteq \mathbb{R}$ setzen wir

$$d(A) = \sup\{|x-y| : x, y \in A\},$$

und

$$\mu_\alpha^*(A) = \lim_{\epsilon \to 0} \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} B_n : d(B_n) < \epsilon, A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\}.$$

μ_α ist ein äußeres Maß (Bsp. 4,5), das zugehörige Maß heißt das α-dimensionale Hausdorffmaß. Zeigen Sie, dass für die Cantormenge und $\alpha = \log(2)/\log(3)$

$$1/2 \leq \mu_\alpha^*(C) \leq 1$$

gilt.

(Die obere Abschätzung sollte klar sein, für die andere Seite kann man zuerst mit dem bekannten Kompaktheitsargument aus der abzählbaren Überdeckung eine endliche machen und dann überlegen, wie viele Teilintervalle von C_n durch Mengen mit Durchmesser zwischen 3^{-n-1} und 3^{-n} überdeckt werden können)