1. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie
SS 2013

1. Man zeige: $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\big) \cup \bigcup_{k=1}^{n-1} \big(A_k \triangle A_{k+1}\big)$

2. Man beweise: Sei (A_n) eine Mengenfolge, dann gilt:

   a) $\limsup \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\limsup A_n}$
   b) $\liminf \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\liminf A_n}$
   c) $A_n \nearrow A_0 \Leftrightarrow \mathbb{1}_{A_n} \nearrow \mathbb{1}_{A_0}$
   d) $A_n \searrow A_0 \Leftrightarrow \mathbb{1}_{A_n} \searrow \mathbb{1}_{A_0}$
   e) $\lim A_n = A_0 \Leftrightarrow \lim \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{A_0}$

3. Für beliebige Mengen $A_1, \ldots, A_n$ definiere man $U_k := \bigcup_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}$,

   $D_k := \bigcap_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}$. Man beweise: $U_k = D_{n+1-k} \quad 1 \leq k \leq n\,.$

4. Man beweise:
   $$\mathbb{1}_{A_1 \triangle \ldots \triangle A_n} \equiv \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} \bmod 2 \tag{1}$$
   Somit besteht $A_1 \triangle \ldots \triangle A_n$ aus allen Elementen $\omega \in \Omega$, die einer ungeraden Anzahl der Mengen $A_1, \ldots, A_n$ angehören. Zeigen Sie dies auch direkt (ohne Formel (1)) mit Hilfe von vollständiger Induktion.

5. $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ seien nichtleere Mengen, $A_i \subseteq \Omega_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ Teilmengen, $\Omega := \prod_{i=1}^{n} \Omega_i := \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$, $A := \prod_{i=1}^{n} A_i$.
   Dann gilt:
   $A^c := \Omega \setminus A = \bigcup_{i=1}^{n} (A_1 \times \cdots \times A_{i-1} \times A_i^c \times \Omega_{i+1} \times \cdots \times \Omega_n)$
   (Wesentlich ist die Darstellung von A^c als Vereinigung disjunkter Mengen! Bei A_i^c bezieht sich die Komplementbildung natürlich auf Ω_i. Veranschaulichen Sie sich die Gleichung anhand von Beispielen in der Ebene bzw. im dreidimensionalen Raum!)

6. Bestimmen Sie $\liminf A_n$ und $\limsup A_n$ für folgende Mengenfolgen:

a) $A_n := \begin{cases} [0,1], & n \text{ gerade} \\ [1,2], & n \ \text{ ungerade;} \end{cases}$

b) $A_{2k-1} := [-2+\frac{1}{k}, 1-\frac{1}{k}], A_{2k} := [-\frac{1}{k}, 1+\frac{1}{k}] \quad \forall\, k \in \mathbb{N};$

c) $A_n := \begin{cases} (0, 1-\frac{1}{n}], & n \ \text{ gerade} \\ (\frac{1}{n}, 1), & n \text{ ungerade.} \end{cases}$

Sind die Folgen monoton? Sind sie konvergent?

7. Es sei $\Omega = \mathbb{R}^2$, und A_n bezeichne die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt $\left(\frac{(-1)^n}{n}, 0\right)$ und Radius 1. Bestimmen Sie $\liminf A_n$ und $\limsup A_n$.