2. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie
SS 2013

1. Man zeige, dass die Folge $(A_1 \triangle \cdots \triangle A_n)$ genau dann konvergiert, wenn gilt $\lim\limits_n A_n = \emptyset$.

   Hinweis: Verwenden Sie $\lim\limits_n B_n = B \Leftrightarrow \lim\limits_n 1_{B_n} = 1_B$ und Bsp. 4 der 1-ten Übung.

2. Man zeige, dass ein Semiring im weiteren Sinn i. A. kein Semiring im engeren Sinn ist.

   Beweis:
   Gegenbeispiel: $\mathfrak{T} = \big\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1,2\}\big\}$

3. Man zeige, dass $\mathfrak{A}$ genau dann eine Algebra ist, wenn $\Omega \in \mathfrak{A}$ und $A, B \in \mathfrak{A} \Rightarrow B \setminus A \in \mathfrak{A}$.

4. (a) Ist $(\mathfrak{R}_n)$ eine Folge von Ringen mit $\mathfrak{R}_n \subseteq \mathfrak{R}_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, so gilt $\mathfrak{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}_n$ ist ein Ring.

   (b) Ist $(\mathfrak{R}_n)$ eine Folge von σ-Ringen mit $\mathfrak{R}_n \subseteq \mathfrak{R}_{n+1}$, so ist $\mathfrak{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}_n$ i.A. kein σ-Ring.

5. Man zeige, dass $\mathfrak{H} := \{A \setminus B : \ A, B \in \mathfrak{C}\}$ ein Semiring i.e.S. ist, wenn $\mathfrak{C} \neq \emptyset$ durchschnitts- und vereinigungsstabil ist.

6. Man zeige, dass jeder σ-Ring endlich oder überabzählbar sein muss.

   Hinweis: Ist (A_n) eine Folge verschiedener Mengen aus $\mathfrak{R}_\sigma$, so bilde man mit $A := \bigcup_n A_n$ alle Durchschnitte, die man mit den Mengen A_n und $A \setminus A_n$ bilden kann. Muss es unendlich viele verschiedene Durchschnitte geben? Wenn ja, wieviele Vereinigungen kann man dann mit diesen Durchschnitten bilden?

7. Man zeige dass das Mengensystem $\mathfrak{C} := \left\{A \subseteq \mathbb{N} : \ \exists \ \lim\limits_n \frac{|A \cap \{1,\dots,n\}|}{n}\right\}$ nicht durchschnittsstabil ist.