3. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie
SS 2013

1. Geben Sie an, ob die folgenden Mengensysteme Semiringe, Semialgebren, Ringe, Algebren, σ-Ringe, σ-Algebren, Dynkin-Systeme, monotone Systeme oder keines davon sind.

   (a) $|\Omega| = \infty$, $\mathfrak{C} := \{A \subseteq \Omega : |A| < \infty \vee |A^c| < \infty\}$

   (b) Ω beliebig, $\mathfrak{C} := \{A \subseteq \Omega : |A| \leq \aleph_0 \vee |A^c| \leq \aleph_0\}$

   (c) $|\Omega| = \infty$, $\mathfrak{C} := \{A \subseteq \Omega : |A| < \infty\}$

   (d) $|\Omega| = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $\mathfrak{C} = \{A \subseteq \Omega : |A| \equiv 0 \mod 2\}$

2. Ω_1, Ω_2 seien nichtleere Mengen, $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine beliebige Abbildung.

   (a) Ist für jedes Dynkin-System $\mathfrak{D}_2$ in Ω_2 auch $f^{-1}(\mathfrak{D}_2)$ ein Dynkin-System in Ω_1?

   (b) Ist für jedes Dynkin-System $\mathfrak{D}$ in Ω_1 auch $\mathfrak{D}_2 := \{B \subseteq \Omega_2 : f^{-1}(B) \in \mathfrak{D}\}$ ein Dynkin-System?

   (c) Wenn $\mathfrak{S}$ eine σ-Algebra auf Ω_1 ist, muss dann $f(\mathfrak{S})$ wenigstens ein Semiring oder ein Dynkin-System sein?

3. Ist $\mathfrak{C} \neq \emptyset$ ein Mengensystem auf Ω und $\mathfrak{E} := \mathfrak{C} \cup \{\emptyset, \Omega\} \cup \{C^c :\ C \in \mathfrak{C}\}$, so zeige man, dass $\mathfrak{H} := \left\{ \bigcap\limits_{i=1}^{n} E_i :\ n \in \mathbb{N},\ E_i \in \mathfrak{E} \right\}$ die von $\mathfrak{C}$ erzeugte Semialgebra i.w.S. ist, und dass $\mathfrak{A} := \left\{ \bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i :\ n \in \mathbb{N},\ H_i \in \mathfrak{H} \right\}$ die von $\mathfrak{C}$ erzeugte Algebra ist

4. Wird eine σ-Algebra $\mathfrak{S}$ von einem höchstens abzählbaren System $\mathfrak{C}$ erzeugt, so gibt es eine höchstens abzählbare Algebra $\mathfrak{A}$, die $\mathfrak{S}$ erzeugt.

5. Ist $\mathfrak{S}$ eine σ-Algebra auf Ω und $C \subseteq \Omega$, so gilt

$$\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{S} \cup \{C\}) = \mathfrak{A} := \{(A \cap C) \cup (B \cap C^c) :\ A, B \in \mathfrak{S}\}.$$

6. Man zeige, dass es zu jeder σ-Algebra $\mathfrak{S}$ auf einem höchstens abzählbaren Raum Ω eine Partition $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{S}$ gibt, die $\mathfrak{S}$ erzeugt.

7. Man zeige, dass für jedes Mengensystem $\mathfrak{C} \neq \emptyset$ gilt $\mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{C}) = \bigcup\limits_{\mathfrak{D} \in \mathcal{D}} \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{D})$ und $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}) = \bigcup\limits_{\mathfrak{D} \in \mathcal{D}} \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{D})$ mit $\mathcal{D} := \{\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C} : |\mathfrak{D}| \leq \aleph_0\}$.