4. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie
SS 2013

1. (a) Was für ein Mengensystem auf $\Omega := [0,1)$ ist

$$\mathfrak{T} := \left\{ \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right), \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right) : i = 0, \ldots, 2^n - 1, n \in \mathbb{N} \right\} ?$$

   (b) Ist $\mu([a,b)) := \begin{cases} b-a, & b<1, \\ 2-a, & a<b=1 \end{cases}$ ein Inhalt bzw. Maß auf $\mathfrak{T}$?

2. Kann man eine auf einem beliebigen Mengensystem $\mathfrak{C} \supset \{\emptyset\}$ gegebene nichtnegative, additive Mengenfunktion μ mit $\mu(\emptyset) = 0$ immer zu einem Inhalt auf $\mathfrak{R}(\mathfrak{C})$ fortsetzen?

3. Man zeige, dass es zu einem endlichen Maß μ auf einem σ-Ring $\mathfrak{R}$ nur höchstens abzählbar viele disjunkte Mengen $A \in \mathfrak{R}$ mit $\mu(A) > 0$ geben kann.

4. Auf dem Mengensystem

$$\mathfrak{C} := \{(a,b] \times (0,1] : 0 \leq a \leq b \leq 1\} \cup \{(0,1] \times (a,b] : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$$

   auf $\Omega = (0,1]^2$ ist die Mengenfunktion μ definiert durch

$$\mu((a,b] \times (0,1]) = \mu((0,1] \times (a,b]) = b - a \ .$$

   (a) Ist $\mathfrak{C}$ eine Semiring?

   (b) Ist μ additiv auf $\mathfrak{C}$?

   (c) Ist die Fortsetzung von μ auf $\mathfrak{R}(\mathfrak{C})$ eindeutig?

5. Ist $(\mu_i)_{i \in I}$ eine Familie von Inhalten auf einem Ring, sodass für alle $i, j \in I$ ein $l \in I$ existiert mit $\mu_i \leq \mu_l, \ \mu_j \leq \mu_l$ (d.h. die Familie ist nach oben gerichtet), dann ist auch $\mu(A) := \sup\limits_i \mu_i(A) \quad \forall\, A \in \mathfrak{R}$ ein Inhalt auf $\mathfrak{R}$. Sind die μ_i Maße, dann ist auch μ ein Maß.

6. Welche der folgenden Mengenfunktionen auf $\mathfrak{P}(\Omega)$ sind äußere Maße?

   (a)

$$\mu^*(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } A = \emptyset, \\ 1, & \text{falls } A \neq \emptyset. \end{cases}$$

   (b)

$$\mu^*(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ höchstens abzählbar}, \\ \infty, & \text{falls } A \text{ überabzählbar unendlich.}; \end{cases}$$

(c)

$$\mu^*(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ endlich,} \\ 1, & \text{falls } A \text{ unendlich.} \end{cases}$$

(d) Es sei $\Omega = \mathbb{R}$.

$$\mu^*(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ beschränkt,} \\ 1, & \text{falls } A \text{ nicht beschränkt.} \end{cases}$$

(e) $|\Omega| = \infty$

$$\mu^*(A) := \begin{cases} \frac{n}{n+1}, & \text{falls } |A| = n, \\ 1, & \text{falls } |A| = \infty. \end{cases}$$

7. Man zeige, dass für jede abzählbare Teilmenge $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ von $\mathbb{R}$ und jede Folge nichtnegativer Zahlen p_n mit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} p_n = 1$ auf dem Semiring $\mathfrak{I} := \{(a, b] : \ -\infty < a \leq b < \infty\}$ durch $\mu((a, b]) = \sum\limits_{x_n\in(a,b]} p_n$. ein Maß definiert wird, und man bestimme μ^* sowie die σ-Algebra der μ^*-meßbaren Mengen.