5. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie
SS 2013

1. Man zeige durch ein Gegenbeispiel, dass die oberen Schranken in den Ungleichungen von Bonferroni i.A. nicht monoton fallend bzw. die unteren Schranken nicht steigend sein müssen.

2. Man zeige, dass für jedes äußere Maß μ^* auf Ω gilt
$$\mu^*(A) \vee \mu^*(B) < \infty \;\Rightarrow\; |\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A\Delta B)\ \forall\, A, B \in \mathfrak{P}(\Omega).$$

3. Man zeige, dass für 2 σ-endliche Maße μ, ν auf einem Semiring $\mathfrak{T}$ gilt
$$\nu(A) \leq \mu(A) \quad \forall\, A \in \mathfrak{T} \;\Rightarrow\; \nu(B) \leq \mu(B) \quad \forall\, B \in \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{T}).$$

4. Ist $\emptyset \in \mathfrak{C}$ ein beliebiges Mengensystem und $f : \mathfrak{C} \to \mathbb{R}^+$ eine Funktion mit $f(\emptyset) = 0$, so ist
$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_n f(C_n) :\ A \subseteq \bigcup_n C_n,\ C_n \in \mathfrak{C}\ \forall\, n \in \mathbb{N} \right\}$$
eine äußere Maßfunktion.

5. Ist $A \subseteq \mathbb{R}^k$, so nennt man $d(A) := \sup\{|\vec{x} - \vec{y}| :\ \vec{x}, \vec{y} \in A\}$ den Durchmesser von A . Man zeige, dass für $m > 0$ und $\varepsilon > 0$ sowohl
$$\mu^*_{m,\varepsilon}(A) := \inf \left\{ \sum_n d(C_n)^m :\ A \subseteq \bigcup_n C_n,\ d(C_n) \leq \varepsilon\ \forall\, n \in \mathbb{N} \right\}$$
als auch
$$\mu^*_m(A) := \sup_{\varepsilon > 0} \mu^*_{m,\varepsilon}(A)$$
äußere Maßfunktionen sind.

6. Ist $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, μ^* das zu μ gehörige äußere Maß und $B \subseteq \Omega$ beliebig, so ist μ^* eine Maßfunktion auf $\mathfrak{S} \cap B$.

7. Man zeige, dass für 2 Maße μ und ν auf einem Semiring $\mathfrak{T}$ über Ω gilt
   (a) $(\mu + \nu)^* = \mu^* + \nu^*$
   (b) $\mathfrak{M}_{(\mu+\nu)^*} \supseteq \mathfrak{M}_{\mu^*} \cap \mathfrak{M}_{\nu^*}$
   (c) Wenn μ, ν σ-endlich $\Rightarrow$ $\mathfrak{M}_{(\mu+\nu)^*} = \mathfrak{M}_{\mu^*} \cap \mathfrak{M}_{\nu^*}$
   (d) Im Allgemeinen gilt in b) keine Gleichheit.