7. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie
SS 2013

1. Ein Spielstein wird rein zufällig auf eines der 3 Felder 1, 2 oder 3 gesetzt. Anschließend wird eine Münze geworfen. Fällt sie auf Kopf, rückt der Stein um 1 Feld nach rechts, bei Adler nach links. Dann wird die Münze wieder geworfen, solange bis der Stein entweder Feld 0 oder Feld 4 erreicht. Im ersten Fall hat Spieler A gewonnen, im zweiten Fall Spieler B. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Stein vom Feld 3 gestartet ist, wenn man weiß, dass B gewonnen hat.

   Hinweis: Ein paar Symmetrieüberlegungen könnten hilfreich sein.

2. Die folgende Aufstellung gibt an, getrennt nach Hautfarbe von Täter und Opfer, wie oft in den USA in einem bestimmten Zeitraum die Todesstrafe verhängt wurde. Dabei bedeutet W, dass der Täter weiß war und S, dass er schwarz war. T bzw. T^c steht für Todesstrafe bzw. Nichtverhängung der Todesstrafe, und O_W bzw. O_S bedeutet weißes bzw. schwarzes Opfer.

	$W \wedge T$	$W \wedge T^c$	$S \wedge T$	$S \wedge T^c$
O_W	19	132	11	52
O_S	0	9	6	97

   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Verhängung der Todesstrafe, wenn Sie nur nach der Hautfarbe des Täters unterscheiden. Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit auch, wenn Sie sowohl nach der Hautfarbe des Täters als auch des Opfers trennen. Versuchen Sie die Diskrepanz in den Ergebnissen zu erklären.

3. Aus $\{1, \dots, n\}$ wird zufällig eine k-elementige, ungeordnete Stichprobe $\{x_1, \dots, x_k\}$ ohne Wiederholung gezogen. Geben Sie den zur Zufallsvariablen $D(\{x_1, \dots, x_k\}) := x_{(k)} - x_{(1)}$ gehörigen Bildraum an, und berechnen Sie die induzierte Verteilung.

   Hinweis: Berechnen Sie zunächst $P([x_{(1)} = x] \cap [x_{(k)} = y])\,, \quad x < y\,,$ indem Sie $\{1, \dots, n\}$ in die 3 Kategorien $\{x, y\}\,, \{x+1, \dots, y-1\}$ und den Rest aufteilen.

4. Ein Alternativversuch, bei dem 1 mit Wahrscheinlichkeit $0 < p < 1$ auftritt, wird immer wieder unabhängig durchgeführt. A_n ist das Ereignis, dass zwischen dem $2^n + 1$-ten und dem 2^{n+1}-ten Versuch mindestens eine Serie von n aufeinanderfolgenden Einsen auftritt. Man beweise:

(a) $p < \frac{1}{2} \Rightarrow P(\limsup_n A_n) = 0$

(b) $p \geq \frac{1}{2} \Rightarrow P(\limsup_n A_n) = 1$

Hinweis zu Punkt 4b. : Können Sie die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass keiner der $\lfloor \frac{2^n}{n} \rfloor$ aufeinanderfolgenden Blöcke der Länge n, die zwischen $2^n + 1$ und 2^{n+1} liegen, aus lauter Einsen besteht?

5. Man zeige, dass für $0 \leq p_n < 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ und $\sum\limits_n p_n < \infty$ gilt

$$\prod_n (1 - p_n) > 0\,.$$

6. Ist $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, ist $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{S}$ ein durchschnittsstabiles Mengensystem, das eine Folge (A_n) mit $\Omega = \bigcup\limits_n A_n$ enthält und gilt für feste Mengen $B, C \in \mathfrak{S}$ und alle $A \in \mathfrak{C}$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B)\, P(C)\,, \tag{1}$$

so gilt Gleichung (1) für alle $A \in \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C})$.

7. Man zeige, dass es keinen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum mit einer Folge von unabhängigen Ereignissen A_n mit $P(A_n) = \frac{1}{2}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ gibt.