8. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie
SS 2013

1. Man zeige, dass für $s > 1$ und $\zeta(s) := \sum\limits_n n^{-s}$ auf $(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}))$ durch $P(A) := \sum\limits_{n \in A} \frac{1}{n^s\,\zeta(s)}$, $A \subseteq \mathbb{N}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert wird, berechne $P(A_p)$ für die Mengen $A_p := \{p\,n :\ n \in \mathbb{N}\}$, p prim und beweise, dass die A_p unabhängig sind, und dass daraus die untenstehende Produktformel von Euler folgt

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p>1:\ \text{prim}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) . \tag{1}$$

   Hinweis: a) Aus $p_1|m \wedge p_2|m,\ p_1, p_2$ prim folgt $m = u\,p_1\,p_2$.
   b) Aus welchen Zahlen besteht $\bigcap\limits_{p>1:\ \text{prim}} A_p^c$?

2. Man zeige, dass auf dem Laplaceraum der Permutationen $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ von $1, \ldots, n$ die Ereignisse $A_1 := \Omega$, $A_i := \left[\pi_i > \max\limits_{1 \leq j < i} \pi_j\right]$, $2 \leq i \leq n$ voneinander unabhängig sind und gilt $P(A_i) = \frac{1}{i} \quad \forall\, 1 \leq i \leq n$.

3. Man zeige, dass eine Folge (X_n) unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariabler, für die gilt $P(X_n = X_m) = 0 \quad \forall\ n \neq m$, mit Wahrscheinlichkeit 1 unendlich oft ein Rekordergebnis liefert, dass also für unendlich viele n gilt $X_n > \max\limits_{1 \leq i < n} X_i$.

4. Man beweise $\lambda_k(\{\vec{x} \in \mathbb{R}^k :\ \exists\, i \neq j \text{ mit } x_i = x_j\}) = 0$.

5. Man zeige, dass für jedes Lebesgue-Stieltjes-Maß μ auf $(\mathbb{R}^k, \mathfrak{B}_k)$, mit dem induzierten äußeren Maß μ^* gilt $\mu^*(A) = 0$, $A \subseteq \mathbb{R}^k$ wenn es ein $0 < \theta < 1$ gibt, sodass $\mu^*\left(A \cap (\vec{a}, \vec{b}]\right) \leq \theta\,\mu\left((\vec{a}, \vec{b}]\right) \quad \forall\, \vec{a} \leq \vec{b}$.

6. Man beweise, dass es zu jedem $A \in \mathfrak{B}$ mit $0 < \lambda(A)$ ein $\epsilon > 0$ gibt, sodass gilt $(-\epsilon, \epsilon) \subseteq A - A := \{x - y :\ x, y \in A\}$.
   Hinweis: Aus Beispiel 5. folgt, dass es wegen $0 < \lambda(A)$ zu $\theta = \frac{3}{4}$ ein Intervall I gibt, sodass $\lambda(A \cap I) > \theta\,\lambda(I)$ .. Zeigen Sie, dass für alle x mit $|x| < \frac{\lambda(I)}{2}$ gilt $\lambda((A \cap I) \cup [(A \cap I) + x]\,) \leq \frac{3\lambda(I)}{2}$, und folgern Sie daraus, dass $(A \cap I) \cap [(A \cap I) + x] \neq \emptyset$.

7. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, wenn μ_F ein Lebesgue-Stieltjes-Maß mit stetiger Verteilungsfunktion F ist?

   (a) $|A| \leq \aleph_0 \ \Rightarrow\ \mu_F(A) = 0$.

(b) $\mu_F(A) > 0 \;\Rightarrow\; \exists\, (a,b) \neq \emptyset :\; (a,b) \subseteq A\,.$

(c) $(\,\mu_F(A) > 0 \;\wedge\; \mu_F(A^c) = 0\,) \;\Rightarrow\;$ A ist dicht in $\mathbb{R}$.

(d) $(\,\lambda(A) > 0 \;\wedge\; \lambda(A^c) = 0\,) \;\Rightarrow\;$ A ist dicht in $\mathbb{R}$.