9. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie
SS 2013

1. Teilungsproblem: Zwei Spieler A und B werfen eine Münze. Bei *Kopf* bekommt A einen Punkt, bei *Adler* dagegen B. Jener Spieler, der als erster n Punkte gesammelt hat, ist der Gesamtsieger und erhält eine Siegesprämie von K Euro. In welchem Verhältnis ist dieser Betrag zu teilen, wenn das Spiel bei einem Punktestand von $x \ : \ y$ abgebrochen werden muss? Wie ist aufzuteilen, wenn die Spieler gegeneinander Schach spielen, und man weiß, dass Spieler A jedes Spiel mit Wahrscheinlichkeit $0 < p < 1$ gewinnt, man aber annimmt dass die bisherigen Spielergebnisse den Ausgang des nächsten Spiels nicht beeinflussen?

2. Bestimmen Sie die Verteilung von X der Anzahl der 6-er in einer Runde von 6 *aus* 45, wenn n Tipps in der Runde unabhängig voneinander und gleichverteilt über alle möglichen Kombinationen abgegeben werden? Mit welcher Wahrscheinlichkeit errät kein Spieler die richtige Zahlenkombination wenn 14 Millionen Tipps abgegeben werden? Welche Verteilung werden Sie verwenden, um die Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$ numerisch zu bestimmen? Berechnen Sie die wahrscheinlichste Anzahl von Gewinnern, sowohl für die exakte Verteilung, als auch für die Verteilung, die Sie zur Approximation verwenden. Geben Sie die konkreten Werte für $n = 14000000$ an.

3. Bei einer Produktion ist der Anteil an fehlerhaften Stücken q mit $0 < q < 1$. Jedes Stück läuft an einer Kontrollstation vorbei, wo es mit Wahrscheinlichkeit p' geprüft wird. Wie ist X die Anzahl der Stücke, die die Kontrollstation passieren (kontrolliert oder unkontrolliert), bevor das erste defekte Stück gefunden wird, verteilt?
Sei Y die Anzahl der unentdeckten fehlerhaften Stücke unter diesen X Produktionseinheiten. Man berechne die Wahrscheinlichkeiten $P([Y = y] | [X = x])$, $P([Y = y] \cap [X = x])$, $P([Y = y])$ sowie $P([X = x] | [Y = y])$, und gebe an, wie Y verteilt ist, wie Y verteilt ist, wenn man weiß, dass $[X = x]$ ist und wie X verteilt ist, wenn man den Wert y von Y kennt.

4. Die Anzahl X_t von Unfällen an einer bestimmten Straßenkreuzung während einer Zeitspanne t ist Poissonverteilt mit dem Parameter $\tau\, t$. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Wartezeit T bis zum ersten Unfall, und zeigen Sie, dass gilt

$$P(T > t + s | T > s) = P(T > t) \quad \forall\, s, t \in \mathbb{R}^+ . \qquad (1)$$

Beweisen Sie ferner, dass die Verteilung von T durch Gleichung (1) und $P(T > 1) = c$ eindeutig bestimmt wird.
Hinweis: Beweisen Sie den letzten Punkt zunächst für $t \in \mathbb{Q}^+$, und denken Sie an die Vorgangsweise bei der geometrischen Verteilung.

5. Man zeige, dass für jede monoton steigende Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt:

   (a) $F_-(x)\,,\ F_+(x)$ existieren $\forall\, x \in \mathbb{R}$ mit $F_-(x) \leq F(x) \leq F_+(x)\,,$

   (b) für $x < y$ gilt $F_+(x) \leq F_-(y)\,,$

   (c) für die Unstetigkeiten $D := \{x :\ F_-(x) \neq F_+(x)\}$ gilt $|D| \leq \aleph_0\,,$

   (d) für $y < z$ gilt $\sum\limits_{x \in D \cap (y,z)} [F_+(x) - F_-(x)] \leq F(z) - F(y)\,.$

6. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F der Wartezeit T eines Autofahrers an einer Verkehrsampel, die $\frac{2}{3}$ der Phase grün und die restliche Phase rot zeigt, wenn die Ankunftszeit ω des Autos als gleichverteilt während der Phase angenommen wird, und stellen Sie F dann als Mischung einer diskreten und einer stetigen Verteilungsfunktion dar.

7. Man zeige, dass

$$F(x_1, \ldots, x_m) := \min(x_1, \ldots, x_m)$$

eine Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}^m$ ist.
Hinweis: Angenommen, es gilt o.E.d.A. $a_m = \max(a_1, \ldots, a_m)$, dann gilt für alle x_j und $a_i \leq b_i$:

$$\min(x_1^{i-1}, a_i, x_{i+1}^{m-1}) = \min(x_1^{i-1}, a_i, x_{i+1}^{m-1}, a_m) = \min(x_1^{i-1}, a_i, x_{i+1}^{m-1}, b_m)$$

mit $x_i^k := (x_i, \ldots, x_k), \quad i \leq k$. Damit sollte man die Aussage aus der expliziten Gestalt von F folgern können.