10. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie
SS 2013

1. Man zeige, dass $F(x_1, y_1) := G(x_1) \wedge x_2$ für jedes monoton wachsende, rechtsstetige $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2-dimensionale Verteilungsfunktion ist, und, dass für $C := \{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{R},\ G^-(x_1) \leq x_2 \leq G(x_1)\}$ gilt $\mu_F(C^c) = 0 \wedge \lambda_2(C) = 0$, wobei μ_F das zu F gehörige Maß bezeichnet.

2. Man zeige, dass $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, 1]$ mit
$$F(x,y) := \begin{cases} 0, & x < 0 \vee y < 0 \\ y^n - (y-x)^n, & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ y^n, & 0 \leq y \leq 1 \ \wedge \ y \leq x \\ 1 - (1-x)^n, & 0 \leq x \leq 1, y > 1 \\ 1, & 1 \leq x, y \end{cases}$$
eine 2-dimensionale Verteilungsfunktion ist.

3. Ist $F : \mathbb{R}^{k_1} \to \mathbb{R}$ eine Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}^{k_1}$ und $G : \mathbb{R}^{k_2} \to \mathbb{R}$ eine Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}^{k_2}$, so ist $F \otimes G$ definiert durch
$$F \otimes G(x_1, \ldots, x_{k_1}, x_{k_1+1}, \ldots, x_{k_1+k_2}) = F(x_1, \ldots, x_{k_1}) G(x_{k_1+1}, \ldots, x_{k_1+k_2})$$
eine Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}^{k_1+k_2}$.

4. Man zeige, dass für $(\Omega, \mathfrak{S})$ mit $|\Omega| > \aleph_0$ und $\mathfrak{S} := \{A \subseteq \Omega : |A| \leq \aleph_0 \vee |A^c| \leq \aleph_0\}$ gilt:
$$f : (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}) \Leftrightarrow \exists A \subseteq \Omega : |A| \leq \aleph_0 \wedge f(\omega) = \text{const}\,, \ \forall\, \omega \in A^c.$$

5. Man zeige, dass eine Funktion $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar ist, wenn ihre Unstetigkeitsstellen eine λ_k-Nullmenge bilden.

6. Man zeige, dass eine Funktion $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ mit höchstens abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen Borel-messbar ist.

7. Man zeige, dass jede rechtsstetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen hat und daher wegen Bsp. 6 Borel-messbar ist.