11. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie SS 2013

1. Man zeige, dass für jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Menge S_f der Stetigkeitspunkte von f Borel-messbar ist.

2. Sie kennen nur die Summe $x_1 + x_2$ der Augenzahlen von 2 Würfen mit einem fairen Würfel. Bestimmen Sie $\mathfrak{S}(S)$ mit $S(x_1\,, x_2) = x_1 + x_2$ und die Klassen der $\mathfrak{S}(S)$-äquivalenten Ausgänge.

3. Man bestimme für $f : (\mathbb{R}^k, \mathfrak{B}_k) \to (\mathbb{R}^k, \mathfrak{B}_k)$ definiert durch $f((x_1, \ldots, x_k)) := (x_{(1)}, \ldots x_{(k)})$ mit $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(k)}$ die σ-Algebra $\mathfrak{S}(f)$ und die Klassen $\mathfrak{S}(f)$-äquivalenter Punkte.
   Welche Funktionen auf $\mathbb{R}^k$ sind $\mathfrak{S}(f)$ messbar?

4. Man beweise, dass für eine Folge (X_n) unabhängiger Zufallsvariabler $\limsup\limits_n X_n\,, \liminf\limits_n X_n\,, \limsup\limits_n \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ und $\liminf\limits_n \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ konstant P-fs sind.

5. Setzt man die Cantor-Funktion F_C definiert durch $F_C(x) := \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{x_i/2}{2^i}$ für $x \in C$, der Cantor-Menge, d.h. $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i},\ x_i \in \{0, 2\} \quad \forall\ i \in \mathbb{N}$ fort auf $\mathbb{R}$ durch $F(y) := \max\{0, \sup\limits_{x \in C \cap (-\infty, y]} F_C(x)\}$, so zeige man

   (a) F ist monoton wachsend.

   (b) $F(C) = [0, 1]$.

   (c) F ist stetig.

   (d) F ist auf C^c differenzierbar mit $F'(x) = 0$.

   (e) Für das zu F gehörige Maß μ_F gilt $\mu_F(C) = 1 \wedge \mu_F(C^c) = 0$.

6. Man zeige, dass für jede Folge (X_n) von Zufallsvariablen auf $(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}), P)$ mit $P(A) := \sum\limits_{n \in A} 2^{-n}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (a) die X_n konvergieren punktweise,

   (b) die X_n konvergieren P-fs,

   (c) die X_n konvergieren in Wahrscheinlichkeit,

   (d) die X_n konvergieren fast gleichmäßig.

7. Man zeige, dass eine auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ gegebene Folge von unabhängigen, B_{p_n}-verteilten Zufallsvariablen X_n genau dann in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergiert, wenn $\lim\limits_n p_n = 0$, und dass gilt $\lim\limits_n X_n = 0 \quad P\text{-fs} \ \Leftrightarrow \ \sum\limits_n p_n < \infty$. Daraus folgere man, dass für $p_n := \frac{1}{n}$ gilt $P - \lim\limits_n X_n = 0$ aber $X_n \not\to 0$ P-fs.