12. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie
SS 2013

1. Man bestimme zu $T : ([0,1]^2, \mathfrak{B}^2) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, gegeben durch $T((x_1, x_2)) := x_1 - x_2$ die Verteilungsfunktion und Dichte des induzierten Maßes $\lambda_2 T^{-1}$ und berechne $\lambda_2 T^{-1}([-a, a])$.

2. Angenommen Sie haben einen Zufallszahlengenerator, der Ihnen auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallszahlen liefert, wie können Sie dann Rayleighverteilte Zufallszahlen (Dichte: $f(x) = 2axe^{-ax^2} \; x, a > 0$) erzeugen?

3. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte, stetige Zufallsvariable mit der Dichte f und der Verteilungsfunktion F. Sei weiters $X_{(n)} := \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ und $X_{(1)} := \min\{X_1, \ldots, X_n\}$.
   (a) Man bestimme die Dichte und die Verteilungsfunktion von $X_{(1)}$ und $X_{(n)}$.
   (b) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilungfunktion von $(X_{(1)}, X_{(n)})$.
   (c) Sind $X_{(1)}$ und $X_{(n)}$ unabhängig?
   (d) Für 2 unabhängige, auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable X_1, X_2 bestimme man $\mathfrak{S}(X_{(1)}, X_{(2)})$ und die durch $(X_{(1)}, X_{(2)})$ induzierte Verteilung.

4. Man berechne den Erwartungswert einer Cauchy-verteilten Zufallsvariablen und erzeuge 10^6 Cauchy-verteilte Zufallszahlen $x_1, \ldots, x_{10^6}$ und stelle die Folge der Mittelwerte $\overline{x}_n = \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$ abhängig von n graphisch dar. Was fällt Ihnen an der Folge der Mittelwerte auf? Außerdem bilde man von jeweils 100 000 Zufallszahlen die Stichprobenmittelwerte und vergleiche diese.

5. Man zeige, dass eine diskrete Zufallsvariable, die die Werte x_n mit den Wahrscheinlichkeiten p_n annimmt, keinen Erwartungswert besitzt, wenn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \, p_n$ bedingt konvergiert.

6. Man zeige, dass $[X \neq 0]$ für $X \in \mathfrak{L}_1(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ eine abzählbare Vereinigung von Mengen mit endlichem Maß ist, dass aber i. A. nicht gilt $\mu([X \neq 0]) < \infty$. Zeigen Sie auch $X \in \mathfrak{L}_1 \; \Rightarrow \; \lim\limits_n \int\limits_{[\,|X|<\frac{1}{n}\,]} |X| \, d\mu = 0$.

7. Man zeige, dass eine Zufallsvariable X genau dann integrierbar ist, wenn
$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| > n) < \infty$$

und, dass dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} nP(|X| > n) = 0$$

Hinweis: Stellen Sie $P(|X| \geq n)$ als Summe von Wahrscheinlichkeiten dar, vertauschen Sie die Summationsreihenfolge und interpretieren Sie das Ergebnis als Integral einer diskreten Zufallsvariablen.