

Man kann nun die Existenz nicht-messbarer Mengen zeigen.

Satz 7.62. *Das Auswahlaxiom vorausgesetzt gilt $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{L} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{R})$.*

Beweis. Bereits in Kapitel 1.1 wurde, das Auswahlaxiom vorausgesetzt, gezeigt, dass es eine Menge $A \subset [0, 1]$ gibt, für die weder $\lambda(A) > 0$ noch $\lambda(A) = 0$ gelten kann. Daraus folgt $A \notin \mathfrak{L}$.

Ist $y := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{2^i}$, $y_i \in \{0, 1\}$ die Binärdarstellung von $y \in [0, 1]$, so wird durch $F_C^{-1}(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2y_i}{3^i}$ die Umkehrfunktion von F_C gebildet. Wie man leicht sieht, sind F_C und F_C^{-1} monoton und damit nach Satz 7.10 Borel-messbar.

Wegen $F_C^{-1} : [0, 1] \rightarrow C$ gilt $F_C^{-1}(A) \subseteq C \Rightarrow \lambda(F_C^{-1}(A)) = 0$, d.h. $F_C^{-1}(A) \in \mathfrak{L}$. Aus $F_C^{-1}(A) \in \mathfrak{B}$ müsste auf Grund der Borel-Messbarkeit von F_C^{-1} folgen $(F_C^{-1})^{-1}(F_C^{-1}(A)) = F_C(F_C^{-1}(A)) = A \in \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{L}$, was im Widerspruch zu $A \notin \mathfrak{L}$ steht.

7.9 Konvergenzarten

Auf einem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ spielt das Verhalten von Funktionen auf einer μ -Nullmenge i.A. keine Rolle. Deshalb werden in diesem Abschnitt die aus der Analysis bekannten Konvergenzarten in geeigneter Weise angepasst.

Bemerkung 7.63. *Unterscheidet man nicht zwischen Funktionen, die μ -fü gleich sind, so wird dadurch eine Äquivalenzrelation $f \sim g := f = g$ μ -fü auf $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{S})$ festgelegt. $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ bezeichnet den Raum der damit gebildeten Äquivalenzklassen. Üblicherweise wird in der Notation nicht zwischen Funktionen und den sie enthaltenden Äquivalenzklassen differenziert, d.h. f steht sowohl für eine Funktion, als auch für ihre zugehörige Äquivalenzklasse.*

Bemerkung 7.64. *Manchmal wird auch der Begriff der μ -fast überall messbaren Funktion f verwendet, das ist entsprechend Definition 7.53 eine Funktion, die auf $(N^c, \mathfrak{S} \cap N^c)$ mit $\mu(N) = 0$ messbar ist. $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ bzw. \mathcal{M}_μ , wenn der Bezug auf (Ω, \mathfrak{S}) klar ist, bezeichnet die Menge der μ -fü messbaren Funktionen. Entsprechend definiert man $\mathcal{M}_\mu^+ := \mathcal{M}^+(\Omega, \mathfrak{S}, \mu) := \{f \in \mathcal{M}_\mu : f \geq 0 \text{ } \mu\text{-fü}\}$.*

Dieser Begriff ist jedoch ohne große praktische Bedeutung, da einerseits $\tilde{f} := f \mathbb{1}_{N^c}$ auf $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ messbar ist und μ -fast überall mit f übereinstimmt, und andererseits auf vollständigen Räumen jede μ -fü messbare Funktion auch messbar ist, sodass dort beide Begriffe zusammenfallen. Hinzu kommt, dass auf den besonders wichtigen σ -endlichen Räumen die Voraussetzung der Vollständigkeit wegen Folgerung 4.22 keine wirkliche Einschränkung darstellt.

Der Begriff ist manchmal in Integralessagen zu finden.

Als erstes betrachten wir die gleichmäßige Konvergenz.

Definition 7.65. Ist $(\Omega, \mathfrak{G}, \mu)$ ein Maßraum, so konvergiert eine Folge (f_n) messbarer Funktionen gleichmäßig μ -fast überall (bzw. P -fs) gegen eine Funktion f , wenn es eine μ -Nullmenge N gibt, sodass (f_n) auf N^c gleichmäßig gegen f konvergiert. Die Folge (f_n) ist eine μ -fü gleichmäßig konvergente Cauchyfolge, wenn sie auf N^c eine gleichmäßig konvergente Cauchyfolge ist.

Wichtig im Zusammenhang mit dieser Konvergenzart ist der folgende Begriff.

Definition 7.66. Eine messbare Funktion f auf einem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{G}, \mu)$ heißt μ -fast überall beschränkt, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $\mu(|f| > c) = 0$.

$$\|f\|_\infty := \text{ess sup } f := \inf\{c \in \mathbb{R} : \mu(|f| > c) = 0\}$$

wird als das essentielle Supremum von f bezeichnet.

$\mathcal{L}_\infty := \mathcal{L}_\infty(\Omega, \mathfrak{G}, \mu) := \{f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{G}, \mu) : \|f\|_\infty < \infty\}$, $\mathbf{L}_\infty := \mathbf{L}_\infty(\Omega, \mathfrak{G}, \mu)$ ist der Raum der Äquivalenzklassen μ -fü gleicher Funktionen aus \mathcal{L}_∞ .

Bemerkung 7.67. Klarerweise gilt $|f| \leq \|f\|_\infty$ μ -fü.

Wir werden zeigen, dass $\|\cdot\|_\infty$, wie die Bezeichnungsweise schon vermuten lässt, eine Norm auf \mathbf{L}_∞ darstellt und die gleichmäßige Konvergenz μ -fü gerade der Konvergenz bezüglich dieser Norm entspricht.

Satz 7.68. Ist $(\Omega, \mathfrak{G}, \mu)$ ein Maßraum, so ist $\mathbf{L}_\infty(\Omega, \mathfrak{G}, \mu)$ ein Banachraum (siehe Definition A.69), d.h. auf $\mathbf{L}_\infty(\Omega, \mathfrak{G}, \mu)$ gelten folgende Aussagen

1. $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$ μ -fü,
2. $f \in \mathbf{L}_\infty, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f \in \mathbf{L}_\infty \wedge \|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \|f\|_\infty$,
3. $f, g \in \mathbf{L}_\infty \Rightarrow f + g \in \mathbf{L}_\infty \wedge \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$,
4. (f_n) konvergiert gleichmäßig μ -fü $\Leftrightarrow \lim_{n, m \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\|_\infty = 0$,
 (f_n) konvergiert gleichmäßig μ -fü gegen $f \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$,
5. $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \exists f \in \mathbf{L}_\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.
 f ist μ -fü eindeutig bestimmt.

Beweis. ad 1.: Aus $f = 0$ μ -fü folgt $\mu(|f| > c) = 0 \quad \forall c > 0 \Rightarrow \|f\|_\infty = 0$.

Aus $\|f\|_\infty = 0$ folgt andererseits $\mu(|f| > \frac{1}{k}) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Daher gilt

$$\mu([f \neq 0]) = \mu\left(\bigcup_k [|f| > \frac{1}{k}]\right) = 0, \text{ also } f = 0 \text{ } \mu\text{-fü.}$$

ad 2.: Dieser Punkt ist offensichtlich.

ad 3.: Gemäß Bemerkung 7.67 gilt $|f + g| \leq |f| + |g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ μ -fü.

Daraus folgt $f + g \in \mathbf{L}_\infty$ und $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

ad 4.: Konvergiert (f_n) gleichmäßig μ -fü, so gibt es eine μ -Nullmenge N und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_ε , sodass für alle $\omega \in N^c$ und $n, m \geq n_\varepsilon$ gilt $|f_n(\omega) - f_m(\omega)| \leq \varepsilon \Rightarrow \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$. D.h. $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\|_\infty = 0$.

Umgekehrt folgt aus $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\|_\infty = 0$, dass es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein n_k gibt, sodass gilt $\mu(|f_n - f_m| > \frac{1}{k}) = 0 \quad \forall n, m \geq n_k$. Daher ist

$N := \bigcup_k \bigcup_{n,m \geq n_k} [|f_n - f_m| > \frac{1}{k}]$ eine μ -Nullmenge. Aber auf N^c bilden die f_n offensichtlich eine gleichmäßig konvergente Cauchy-Folge. Ersetzt man oben f_m durch f , so erhält man die 2-te Aussage des Punktes. ad 5.: Gilt $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\|_\infty = 0$, so gibt es wegen 4. eine μ -Nullmenge N , sodass (f_n) auf N^c eine gleichmäßig konvergente Cauchyfolge ist. Daher existiert ein eindeutig bestimmter Grenzwert $\tilde{f}(\omega) := \lim_n f_n(\omega) \forall \omega \in N^c$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_ε mit $|f_n(\omega) - f_m(\omega)| < \varepsilon \forall \omega \in N^c$ für $n, m \geq n_\varepsilon$. Da der Betrag $|\cdot|$ stetig ist, folgt daraus für $n \geq n_\varepsilon$ $|\tilde{f}(\omega) - f_n(\omega)| = \lim_m |f_m(\omega) - f_n(\omega)| \leq \varepsilon \forall \omega \in N^c$, d.h. (f_n) konvergiert auf N^c gleichmäßig gegen \tilde{f} . Damit konvergiert (f_n) aber auch gleichmäßig μ -fü gegen $f := \tilde{f} \mathbb{1}_{N^c}$. Wegen $|f(\omega)| = 0 \forall \omega \in N$ und $|f(\omega)| = |\tilde{f}(\omega)| \leq |\tilde{f}(\omega) - f_n(\omega)| + |f_n(\omega)| \leq \varepsilon + \|f_n\|_\infty < \infty \forall \omega \in N^c$ ist f μ -fü beschränkt, also $f \in \mathbf{L}_\infty$. Der Beweis der umgekehrten Implikation ist trivial, denn, wenn es ein $f \in \mathbf{L}_\infty$ mit $\lim_n \|f_n - f\|_\infty = 0$ gibt, so gilt nach Punkt 3.

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \|f_n - f + f - f_m\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f - f_m\|_\infty \rightarrow 0.$$

Nicht mit der gleichmäßigen Konvergenz verwechseln darf man die μ -fast gleichmäßige Konvergenz, die im folgenden beschrieben wird.

Definition 7.69. Eine Folge (f_n) messbarer Funktionen auf einem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ konvergiert μ -fast gleichmäßig, wenn es zu jedem $\delta > 0$ ein $N_\delta \in \mathfrak{S}$ gibt mit $\mu(N_\delta) \leq \delta$, sodass (f_n) auf N_δ^c gleichmäßig konvergiert.

Beispiel 7.70. Auf $([0, 1], \mathfrak{B} \cap [0, 1], \lambda)$ konvergiert $f_n(\omega) := \omega^n, n \in \mathbb{N}$ nicht gleichmäßig gegen 0 λ -fü, aber die Folge konvergiert auf jedem Intervall $[0, 1 - \delta], 0 < \delta < 1$ gleichmäßig. Weil gilt $\lambda([0, 1 - \delta]) \leq \delta$, konvergiert sie somit λ -fast gleichmäßig gegen 0.

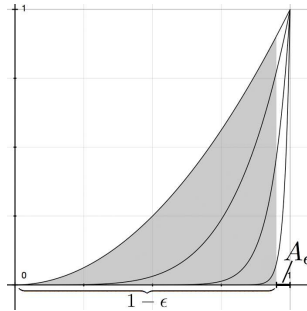


Abb. 7.4. Fast gleichmäßige Konvergenz von $f_n(\omega) = \omega^n$

Die μ -fast gleichmäßige Konvergenz lässt sich wie folgt charakterisieren:

Satz 7.71. Eine Folge (f_n) messbarer, reellwertiger Funktionen auf einem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{G}, \mu)$ konvergiert genau dann μ -fast gleichmäßig, wenn gilt

$$\lim_m \mu \left(\bigcup_{i,j \geq m} [|f_i - f_j| > \varepsilon] \right) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (7.10)$$

Beweis. Konvergiert (f_n) fast gleichmäßig, so gibt es für alle $\delta > 0$ ein $N_\delta \in \mathfrak{G}$ mit $\mu(N_\delta) \leq \delta$, sodass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $m := m(\varepsilon, \delta)$ existiert, zu dem für alle $\omega \in N_\delta^c$ gilt $|f_i(\omega) - f_j(\omega)| \leq \varepsilon \quad \forall i, j \geq m$, d.h. $N_\delta^c \subseteq \bigcap_{i,j \geq m} [|f_i - f_j| \leq \varepsilon]$. Das impliziert $N_\delta \supseteq \bigcup_{i,j \geq m} [|f_i - f_j| > \varepsilon]$. Also

gilt $\mu \left(\bigcup_{i,j \geq m} [|f_i - f_j| > \varepsilon] \right) \leq \delta \quad \forall n \geq m$. Das ist äquivalent zu (7.10).

Gilt umgekehrt (7.10), so gibt es für alle $\delta > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ ein $m := m(k, \delta)$

mit $\mu \left(\bigcup_{i,j \geq m} [|f_i - f_j| > \frac{1}{k}] \right) < \frac{\delta}{2^k} \Rightarrow \mu \left(\bigcup_k \bigcup_{i,j \geq m} [|f_i - f_j| > \frac{1}{k}] \right) < \delta$.

Auf $N_\delta^c := \bigcap_k \bigcap_{i,j \geq m} [|f_i - f_j| \leq \frac{1}{k}]$ konvergiert (f_n) gleichmäßig, denn aus $i, j \geq m$ folgt $|f_i(\omega) - f_j(\omega)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall \omega \in N_\delta^c$, und m hängt nicht von ω ab.

Bemerkung 7.72. Es gilt natürlich $\bigcup_{i,j \geq m} [|f_i - f_j| > \varepsilon] \supseteq \bigcup_{i > m} [|f_i - f_m| > \varepsilon]$.

Da aus $[|f_i - f_j| > \varepsilon] \subseteq [|f_i - f_m| > \frac{\varepsilon}{2}] \cup [|f_m - f_j| > \frac{\varepsilon}{2}]$ andererseits auch folgt $\bigcup_{i,j \geq m} [|f_i - f_j| > \varepsilon] \subseteq \bigcup_{i > m} [|f_i - f_m| > \frac{\varepsilon}{2}]$, ist Bedingung (7.10) und damit die μ -fast gleichmäßige Konvergenz der Folge (f_n) weiters äquivalent zu

$$\lim_m \mu \left(\bigcup_{i > m} [|f_i - f_m| > \varepsilon] \right) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (7.11)$$

Satz 7.73. Ist $(\Omega, \mathfrak{G}, \mu)$ ein Maßraum, so bilden die messbaren Funktionen f_n genau dann eine μ -fast gleichmäßig konvergente Cauchy-Folge, wenn es eine messbare Funktion f gibt, sodass (f_n) μ -fast gleichmäßig gegen f konvergiert. f ist μ -fü eindeutig bestimmt.

Beweis. Falls (f_n) μ -fast gleichmäßig konvergiert, existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $A_k \in \mathfrak{G}$ mit $\mu(A_k^c) \leq \frac{1}{k}$, auf dem (f_n) gleichmäßig konvergiert. Daher folgt aus Satz 7.68 Punkt 4. und 5. angewandt auf $(A_k, \mathfrak{G} \cap A_k, \mu)$ die Existenz einer Funktion \tilde{f} , gegen die (f_n) auf A_k gleichmäßig konvergiert.

Da $\tilde{f}(\omega)$ für alle $\omega \in \bigcup_k A_k$ eindeutig bestimmt ist und gilt $\mu \left(\bigcap_k A_k^c \right) = 0$, erhält man mit $f := \tilde{f} \mathbb{1}_{\bigcup_k A_k}$ eine μ -fü eindeutig bestimmte, messbare Funktion, gegen die die f_n μ -fast gleichmäßig konvergieren.

Die umgekehrte Aussage folgt sofort aus $|f_n - f_m| \leq |f_n - f| + |f - f_m|$.

Wie aus dem obigen Beweis hervorgeht, konvergiert eine μ -fast gleichmäßig konvergente Folge punktweise, abgesehen von einer Nullmenge $(\bigcap_k A_k^c)$.

Wir führen für diese Art der Konvergenz eine eigene Bezeichnung ein.

Definition 7.74. Eine Folge (f_n) messbarer Funktionen auf einem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ ist eine Cauchy-Folge μ -fü (konvergiert μ -fü), wenn es ein $N^c \in \mathfrak{S}$ mit $\mu(N) = 0$ gibt, sodass die $(f_n(\omega))$ für alle $\omega \in N^c$ Cauchy-Folgen sind. Die Folge (f_n) konvergiert μ -fü gegen eine Funktion f , wenn für alle $\omega \in N^c$ gilt $\lim_n f_n(\omega) = f(\omega)$ (i.Z. $\lim_n f_n = f$ μ -fü bzw. $f_n \rightarrow f$ μ -fü).

Auf Wahrscheinlichkeitsräumen $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ sagt man stattdessen die Folge (X_n) ist eine Cauchy-Folge P -fs, konvergiert P -fs oder konvergiert P -fs gegen X (i.Z. $\lim_n X_n = X$ P -fs bzw. $X_n \rightarrow X$ P -fs).

Bemerkung 7.75. Für erweitert reellwertige f_n ist $\lim_n f_n = f$ μ -fü so zu verstehen, dass es eine μ -Nullmenge N gibt und für alle $\varepsilon > 0$ und $\omega \in N^c$ ein $n_0(\varepsilon, \omega) \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq n_0(\varepsilon, \omega)$ gilt $f_n(\omega) < -\frac{1}{\varepsilon}$ falls $f(\omega) = -\infty$, $f_n(\omega) > \frac{1}{\varepsilon}$ falls $f(\omega) = \infty$ und $|f_n(\omega) - f(\omega)| < \varepsilon$ falls $f(\omega) \in \mathbb{R}$.

Lemma 7.76. Eine Folge (f_n) messbarer, reellwertiger Funktionen auf einem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ ist eine Cauchy-Folge μ -fü genau dann, wenn es ein $f \in \mathcal{M}$ gibt, sodass $\lim_n f_n = f$ μ -fü. f ist μ -fü eindeutig bestimmt.

Beweis. Ist (f_n) eine Cauchy-Folge auf dem Komplement der μ -Nullmenge N , so gibt es nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium für alle $\omega \in N^c$ einen Grenzwert $\tilde{f}(\omega) := \lim_n f_n(\omega)$. Somit gilt $f := \tilde{f} \mathbb{1}_{N^c} = \lim_n f_n$ μ -fü mit $f \in \mathcal{M}$. Gibt es ein g und eine μ -Nullmenge N_1 mit $\lim_n f_n(\omega) = g(\omega) \quad \forall \omega \in N_1^c$, so gilt $f(\omega) = g(\omega) \quad \forall \omega \in N^c \cap N_1^c$, und $N \cup N_1$ ist ebenfalls eine μ -Nullmenge.

Die Umkehrung folgt wieder aus $|f_n - f_m| \leq |f_n - f| + |f - f_m|$.

Für die μ -fü-Konvergenz gilt das folgende Kriterium:

Lemma 7.77. Eine Folge (f_n) messbarer, reellwertiger Funktionen auf einem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ konvergiert genau dann μ -fü, wenn

$$\mu \left(\bigcap_n \bigcup_{i,j \geq n} [|f_i - f_j| > \varepsilon] \right) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (7.12)$$

Beweis. Es gilt $N^c := \bigcap_k \bigcup_n \bigcap_{i,j \geq n} [|f_i - f_j| \leq \frac{1}{k}] = \left[\lim_{i,j \geq n} |f_i - f_j| = 0 \right]$, denn $\omega \in N^c \Leftrightarrow \forall k \exists n : |f_i(\omega) - f_j(\omega)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall i, j \geq n$. Daher konvergiert (f_n) genau dann μ -fü, wenn $\mu(N) = 0$. Aber $N = \bigcup_k \bigcap_n \bigcup_{i,j \geq n} [|f_i - f_j| > \frac{1}{k}]$ ist genau dann eine μ -Nullmenge, wenn die zu (7.12) äquivalente Bedingung

$$\mu \left(\bigcap_n \bigcup_{i,j \geq n} [|f_i - f_j| > \frac{1}{k}] \right) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ gilt.}$$

Bemerkung 7.78. Die in Bemerkung 7.72 gemachten Argumente zeigen, dass man (7.12) ersetzen kann durch

$$\mu \left(\bigcap_n \bigcup_{i>n} [|f_i - f_n| > \varepsilon] \right) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (7.13)$$

Wir wollen nun die im Anschluss an Satz 7.73 getroffene Feststellung, dass fast gleichmäßige Konvergenz μ -fü punktweise Konvergenz impliziert, als Lemma formulieren.

Lemma 7.79. Ist (f_n) eine μ -fast gleichmäßig konvergente Folge messbarer, reellwertiger Funktionen auf einem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{G}, \mu)$, so gilt

$$\lim_{i,j \geq n} |f_i - f_j| = 0 \quad \mu\text{-fü}. \quad (7.14)$$

Beweis. Dies ergibt sich einerseits unmittelbar aus dem Beweis von Satz 7.73, andererseits aber auch aus den beiden Kriterien Satz 7.71 und Lemma 7.77, denn nach Satz 3.21 (Stetigkeit von oben) folgt aus (7.10) sofort (7.12), d.h.

$$\lim_n \mu \left(\bigcup_{i,j \geq n} [|f_i - f_j| > \varepsilon] \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu \left(\bigcap_n \bigcup_{i,j \geq n} [|f_i - f_j| > \varepsilon] \right) = 0.$$

Aus (7.12) folgt (7.10) i.A. nicht. Tatsächlich gibt es μ -fü konvergente Folgen, die nicht fast gleichmäßig konvergieren, wie das nächste Beispiel zeigt.

Beispiel 7.80. Auf $(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}), \zeta)$ mit $\zeta(A) = |A| \quad \forall A \in \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ konvergieren die Funktionen $f_n := \mathbb{1}_{\{1, \dots, n\}}$ punktweise, und damit auch ζ -fü gegen $f \equiv 1$. Da aus $\zeta(A) < \varepsilon < 1$ folgt $A = \emptyset$, entspricht die ζ -fast gleichmäßige Konvergenz in diesem Beispiel der gleichmäßigen Konvergenz. Doch (f_n) konvergiert auf \mathbb{N} zweifellos nicht gleichmäßig gegen $f \equiv 1$.

Doch unter einer zusätzlichen Voraussetzung gilt auch die Umkehrung.

Satz 7.81 (Satz von Egoroff). Auf einem endlichen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{G}, \mu)$ konvergiert jede μ -fü-konvergente Funktionenfolge (f_n) auch μ -fast gleichmäßig.

Beweis. Auf endlichen Räumen gilt $\lim_n \mu(A_n) = \mu(A)$ für jede monoton fallende Folge (A_n) aus \mathfrak{G} (siehe Satz 3.21). Daher folgt in diesem Fall aus der zur Konvergenz μ -fü äquivalenten Bedingung (7.12) Bedingung (7.10), welche μ -fast gleichmäßige Konvergenz impliziert.

Schwächt man die Bedingung $\lim_n \mu \left(\bigcup_{i,j \geq n} [|f_i - f_j| > \varepsilon] \right) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$ etwas ab, so führt dies zu einem von F. Riesz eingeführten Konvergenzbegriff, der vor allem in der Wahrscheinlichkeitstheorie sehr wichtig ist.

Definition 7.82. Eine Folge (f_n) messbarer, reellwertiger Funktionen auf einem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ konvergiert im Maß (bzw. in Wahrscheinlichkeit), wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i, j \geq n} \mu(|f_i - f_j| > \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (7.15)$$

Die Folge f_n konvergiert im Maß (bzw. in Wahrscheinlichkeit) gegen $f \in \mathcal{M}$ (i.Z. $\mu - \lim_n f_n = f$ bzw. $f_n \xrightarrow{\mu} f$), wenn gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(|f_n - f| > \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (7.16)$$

Satz 7.83. Konvergiert eine Folge (f_n) auf einem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ μ -fast gleichmäßig, so konvergiert sie auch im Maß.

Beweis. Aus $[|f_i - f_j| > \varepsilon] \subseteq \bigcup_{i, j \geq n} [|f_i - f_j| > \varepsilon] \quad \forall i, j \geq n$ folgt natürlich

$$\sup_{i, j \geq n} \mu(|f_i - f_j| > \varepsilon) \leq \mu\left(\bigcup_{i, j \geq n} [|f_i - f_j| > \varepsilon]\right),$$

und daher impliziert die zur μ -fast gleichmäßigen Konvergenz äquivalente Bedingung (7.10) die Definitionsgleichung (7.15) für die Konvergenz im Maß.

Satz 7.84. Konvergiert eine Folge (f_n) auf einem endlichen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ μ -fü, so konvergiert sie auch im Maß.

Beweis. Dies folgt sofort aus dem Satz von Egoroff (Satz 7.81) und Satz 7.83.

Bemerkung 7.85. Die Aussage des obigen Satzes ist für beliebige Maßräume i.A. nicht richtig, so konvergiert die Folge aus Beispiel 7.80 punktweise aber nicht gleichmäßig. Doch auf $(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}), \zeta)$ mit $\zeta(A) = |A| \quad \forall A \in \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ ist die Konvergenz im Maß äquivalent zur gleichmäßigen Konvergenz, da aus $\lim_n \zeta(|f_n - f| > \varepsilon) = 0$ folgt $[|f_n - f| > \varepsilon] = \emptyset$ für hinreichend großes n .

Aber auf endlichen Räumen ist die Konvergenz im Maß schwächer als die Konvergenz μ -fü, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 7.86. Auf dem Raum $([0, 1], \mathfrak{B} \cap [0, 1], \lambda)$ konvergieren die Funktionen $\mathbb{1}_{\left[\frac{n - [\sqrt{n}]^2}{2[\sqrt{n}] + 1}, \frac{n + 1 - [\sqrt{n}]^2}{2[\sqrt{n}] + 1}\right]}$ im Maß, weil $\lambda\left(\left[\frac{n - [\sqrt{n}]^2}{2[\sqrt{n}] + 1}, \frac{n + 1 - [\sqrt{n}]^2}{2[\sqrt{n}] + 1}\right]\right) = \frac{1}{2[\sqrt{n}] + 1} \rightarrow 0$.

Da die Trägerintervalle der obigen Indikatoren zwischen je 2 aufeinanderfolgenden Quadratzahlen m^2 und $(m + 1)^2$ das Intervall $[0, 1]$ von links nach rechts durchlaufen, gilt $f_{n(m)}(\omega) = 1 \quad \forall m \in \mathbb{N}$ mit $n(m) := m^2 + \frac{[\omega(2m+1)]}{2m+1}$. Daher konvergiert (f_n) in keinem einzigen Punkt von $[0, 1]$.

Satz 7.87. Ist $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum, so bilden die messbaren, reellwertigen Funktionen f_n genau dann eine Cauchy-Folge im Maß, wenn es eine messbare Funktion f gibt, für die gilt $\mu - \lim_n f_n = f$. f ist μ -fü eindeutig bestimmt. Zudem enthält (f_n) eine Teilfolge, die μ -fast gleichmäßig gegen f konvergiert.

Beweis. Die eine Richtung, dass jede Folge (f_n) eine Cauchy-Folge im Maß ist, wenn es ein $f \in \mathcal{M}$ gibt, sodass gilt $\mu - \lim_n f_n = f$, ergibt sich sofort aus

$$[|f_i - f_j| > \varepsilon] \subseteq [|f_i - f| > \frac{\varepsilon}{2}] \cup [|f - f_j| > \frac{\varepsilon}{2}] \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Gilt $\mu - \lim_n f_n = g$ für ein weiteres $g \in \mathcal{M}$, so folgt ähnlich wie oben aus $[|f - g| > \varepsilon] \subseteq [|f - f_n| > \frac{\varepsilon}{2}] \cup [|f_n - g| > \frac{\varepsilon}{2}] \quad \forall \varepsilon > 0$ sofort $f = g$ μ -fü.

Damit ist auch die Eindeutigkeitsaussage bewiesen. Wir zeigen nun, dass jede Cauchy-Folge im Maß eine μ -fast gleichmäßige Teilfolge enthält, und werden daraus auf die Existenz einer Funktion f mit $\mu - \lim_n f_n = f$ schließen.

Konvergiert (f_n) im Maß, so existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $n(k)$, sodass für alle $n \geq n(k)$ gilt $\sup_{i,j \geq n} \mu(|f_i - f_j| > \frac{1}{2^k}) < \frac{1}{2^k}$. Mit den strikt monoton wach-

senden Indices $n_1 := n(1)$, $n_k := n(k) \vee (n_{k-1} + 1)$ bildet man die Teilfolge (f_{n_k}) , sowie die Mengen $N_m := \bigcup_{k \geq m} [|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| > \frac{1}{2^k}]$, deren Maß man

abschätzen kann durch $\mu(N_m) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m-1}} \quad \forall m \in \mathbb{N}$. Aber auf N_m^c

konvergiert (f_{n_k}) gleichmäßig, denn für alle $h \in \mathbb{N}$ und $h \vee m \leq i < j$ gilt

$$|f_{n_j}(\omega) - f_{n_i}(\omega)| \leq \sum_{k=i}^{j-1} |f_{n_{k+1}}(\omega) - f_{n_k}(\omega)| \leq \sum_{k=h \vee m}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^{h-1}} \quad \forall \omega \in N_m^c.$$

Somit ist (f_{n_k}) eine μ -fast gleichmäßig konvergente Cauchy-Folge, und nach Satz 7.73 gibt es ein $f \in \mathcal{M}$ gegen das (f_{n_k}) μ -fast gleichmäßig konvergiert.

Nach Satz 7.83 gilt deshalb auch $\mu - \lim_k f_{n_k} = f$, und schließlich folgt aus $[|f_n - f| > \varepsilon] \subseteq [|f - f_{n_k}| > \frac{\varepsilon}{2}] \cup [|f_{n_k} - f_n| > \frac{\varepsilon}{2}] \quad \forall \varepsilon > 0$, dass die gesamte Folge (f_n) im Maß gegen f konvergiert.