ÜBUNGSBLATT 1

1) Für die symmetrische Differenz zweier Mengen A, B zeige man

$$\mathbb{1}_{A \triangle B} = |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B| = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2 \cdot \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B \equiv \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \mod (2)$$

und verallgemeinere es auf

$$\mathbb{1}_{A_1 \triangle \ldots \triangle A_n} \equiv \sum_{1 \leq i \leq n} \mathbb{1}_{A_i} \mod (2)$$

Dies bedeutet, daß $A_1 \triangle \ldots \triangle A_n$ aus allen Elementen $x \in \Omega$ besteht, die einer ungeraden Anzahl der Mengen $A_1, \ldots, A_n$ angehören.

2) Bestimmen Sie $\liminf\limits_{n \to \infty} A_n$ und $\limsup\limits_{n \to \infty} A_n$ für folgende Mengenfolgen:

- **a)** $A_n := [0, 1]$, falls n gerade und $:= [1, 2]$, falls n ungerade ist;
- **b)** $A_{2k-1} := [-2 + \frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k}]$, $A_{2k} := [-\frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k}] \quad \forall k \in \mathbb{N}$;
- **c)** $A_n := (0, 1 - \frac{1}{n}]$, falls n gerade und $:= (\frac{1}{n}, 1)$, falls n ungerade ist.

Sind diese Folgen isoton? Sind sie konvergent?

3) Es sei $\Omega = \mathbb{R}^2$, und A_n bezeichne die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt $\left(\frac{(-1)^n}{n}, 0\right)$ und Radius 1. Bestimmen Sie $\liminf A_n$ und $\limsup A_n$.

4) Das (nicht leere) Mengensystem $\mathfrak{R} \subseteq 2^\Omega$ sei ein Ring. Bezüglich welcher Mengenoperationen bildet $\mathfrak{R}$ einen Ring im *algebraischen Sinn* ?

5) Das *Spur*-System (oder *Restriktion*) von $\mathfrak{C} \subseteq 2^\Omega$ bezüglich $M \subset \Omega$ ist das Mengensystem

$$\mathfrak{C}|_M := \{E \cap M | E \in \mathfrak{C}\}.$$

Welche Strukturen von $\mathfrak{C}$ übertragen sich auf die Spur? Wenn also $\mathfrak{C}$ die Struktur eines

- **a)** σ-Rings
- **b)** Semirings
- **c)** monotonen Systems
- **d)** Dynkin-Systems

besitzt, hat dann $\mathfrak{C}|_M$ dieselbe Struktur?

6) Man zeige, dass die Folge $(A_1 \triangle \cdots \triangle A_n)$ genau dann konvergiert, wenn gilt $\lim\limits_n A_n = \emptyset$.

Hinweis: Man verwende Indiktorfunktionen $\mathbb{1}_A$ und deren Grenzwerte sowie die Darstellung aus Beispiel 1 .

7) Mit Gegenbeispielen soll belegt werden, dass

- **a)** Ein Semiring im *weiteren Sinn* im Allgemeinen kein Semiring im *engeren Sinn* ist.
- **b)** der Durchschnitt von Semiringen (im engeren Sinn) im Allgemeinen kein Semiring ist.

8) Geben Sie an, ob die folgenden Mengensysteme Semiringe, Semialgebren, Ringe, Algebren, σ-Ringe, σ-Algebren, Dynkin-Systeme, monotone Systeme oder keines davon sind.

a) $|\Omega| = \infty$, $\mathfrak{C} := \{A \subseteq \Omega : |A| < \infty \vee |A^c| < \infty\}$

b) Ω beliebig, $\mathfrak{C} := \{A \subseteq \Omega : |A| \leq \aleph_0 \vee |A^c| \leq \aleph_0\}$

c) $|\Omega| = \infty$, $\mathfrak{C} := \{A \subseteq \Omega : |A| < \infty\}$

d) $|\Omega| = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $\mathfrak{C} = \{A \subseteq \Omega : |A| \equiv 0 \mod 2\}$