ÜBUNGSBLATT 2

9) Das (nicht leere) Mengensystem $\mathfrak{C}$ sei $\cup$- und $\cap$-stabil. Dann ist das System der Differenzen

$$\mathfrak{H} := \{A \setminus B : \ A, B \in \mathfrak{C}\}$$

ein Semiring i.e.S..

10) Es sei eine aufsteigende Folge von σ-Ringen $(\mathfrak{R}_n)$ mit $\mathfrak{R}_n \subseteq \mathfrak{R}_{n+1}$ gegeben. Man zeige, dass dann der Limes

$$\mathfrak{R} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}_n$$

wieder ein Ring ist. Man argumentiere, dass diese Aussage für σ-Ringe nicht gilt.

11) Ω_1, Ω_2 seien nichtleere Mengen, $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ sei eine beliebige Abbildung.

a) Ist für jedes Dynkin-System $\mathfrak{D}_2$ in Ω_2 auch $f^{-1}(\mathfrak{D}_2)$ ein Dynkin-System in Ω_1?

b) Ist für jedes Dynkin-System $\mathfrak{D}$ in Ω_1 auch $\mathfrak{D}_2 := \{B \subseteq \Omega_2 : f^{-1}(B) \in \mathfrak{D}\}$ ein Dynkin-System?

c) Wenn $\mathfrak{S}$ eine σ-Algebra auf Ω_1 ist, muss dann $f(\mathfrak{S})$ wenigstens ein Semiring oder ein Dynkin-System sein?

12) Man bilde die von den folgenden Mengensystemen erzeugten σ-Algebren

a) Ω beliebig, $A \subseteq \Omega, \mathfrak{C} = \{A\}$

b) Ω beliebig, $\mathfrak{C}_A := \{B : A \subseteq B\}$

c) $\mathfrak{C} := \{A \subseteq \mathbb{R} : |A| = 2\}$

13) Es existiert keine σ-Algebra, die genau abzählbar unendlich viele Elemente besitzt, für jede σ-Algebra $\mathfrak{A}$ auf beliebigem Ω gilt

$$|\mathfrak{A}| \ \neq \ \aleph_0$$

Hinweis: Man argumentiere für eine messbare Folge (verschiedener) Mengen A_i mit $\Omega = \bigcup_i A_i$ für das Mengensystem

$$\mathcal{P} \ = \ \{\bigcap_i B_i | B_i = A_i \ \vee B_i = A_i^c\} \ ,$$

das nicht mehr abzählbar viele verschiedene Mengen enthalten kann. (Die Aussage gilt auch für σ-Ringe.)

14) Der Raum Ω sei höchstens abzählbar. Man zeige, dass dann jede σ-Algebra $\mathfrak{A}$ durch eine Partition $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ erzeugt wird

$$\mathfrak{A} \ = \ \sigma(\mathcal{P}_{\mathcal{A}}) \ .$$

15) Die Borel σ-Algebra $\mathcal{B}$ auf $\mathbb{R}$ wird nicht durch eine Partition erzeugt. Welche σ-Algebra entsteht durch die feinste Partition aus $\mathcal{B}$?

16) Ein Mengensystem $\mathcal{M}$ auf Ω heißt *Punkte trennend* oder nur *trennend*, wenn $\forall x, y \in \Omega, x \neq y$, eine Menge $A \in \mathcal{M}$ existiert mit $x \in A, y \notin A$ oder $y \in A, x \notin A$.
Man zeige, dass die σ-Algebra $\mathfrak{A} = \sigma(\mathcal{E})$ genau dann trennend ist, wenn das Erzeugendensystem $\mathcal{E}$ trennend ist.