MASS- & WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE I

http://www.statistik.tuwien.ac.at/lv-guide SS 2014

ÜBUNGSBLATT 3

17) $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ sei ein endlicher Maßraum. Für die messbaren Folgen $A_i, B_i \in \mathfrak{A}$ gelte $B_i \subset A_i$. Man zeige

$$\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) - \mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i) \;\leq\; \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i) - \mu(B_i)\ .$$

18) Kann man eine auf einem beliebigen Mengensystem $\mathfrak{C} \supset \{\emptyset\}$ gegebene nichtnegative, additive Mengenfunktion μ mit $\mu(\emptyset) = 0$ immer zu einem Inhalt auf $\mathfrak{R}(\mathfrak{C})$ fortsetzen?

19) Für $\Omega = \mathbb{N}$ und Mengen $A \in 2^{\Omega}$ sei eine Mengenfunktion

$$\mu(A) \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\; \zeta\big|_{\mathbb{N}}(A \cap [1, n])$$

für A mit endlichem Limes definiert. Dabei bezeichnet $\zeta|_{\mathbb{N}}$ das Zählmaß auf $\mathbb{N}$. Man zeige, dass μ additiv ist. Ist μ auch $\sigma-$additiv ? Man gebe eine Menge $A \subset \mathbb{N}$ an, für die $\mu(A)$ nicht definiert ist.

20) Für $\Omega = \mathbb{R}$ und die $\sigma-$Algebra (vgl. Bsp. 8b))

$$\mathfrak{A} := \{A \subseteq \Omega : |A| \leq \aleph_0 \vee |A^c| \leq \aleph_0\}$$

betrachte man die Mengenfunktion

$$p(A) \;:=\; \begin{cases} 0 & |A| \leq \aleph_0 \\ 1 & |A^c| \leq \aleph_0 \end{cases}$$

- **a)** Man zeige, dass auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{A})$ durch $p(.)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert ist.
- **b)** Bleibt $p(.)$ auch ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Borel-Raum $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$?
- **c)** Wie verhält sich $p(.)$ für $(\mathbb{Q}, \mathfrak{B}|_{\mathbb{Q}})$?

21) Auf $\Omega := (0, 1] \cap \mathbb{Q}$ ist das Mengensystem $\mathfrak{T} := \{I_a^b := \{x \in \Omega : a < x \leq b\} : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$ gegeben und auf $\mathfrak{T}$ wird eine Mengenfunktion μ definiert durch $\mu(I_a^b) = b - a$.

- **a)** Zeigen Sie, dass $\mathfrak{T}$ eine Semialgebra ist.
- **b)** Zeigen Sie, dass μ ein Inhalt ist aber kein Maß sein kann.
- **c)** μ ist stetig von unten und von oben.

22) Man zeige, dass es zu einem endlichen Maß μ auf einem σ-Ring $\mathfrak{R}$ nur höchstens abzählbar viele disjunkte Mengen $A \in \mathfrak{R}$ mit $\mu(A) > 0$ geben kann.

23) Für Ereignisse $A_i \in \mathfrak{E}$, $i \in \mathbb{N}$ eines Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathfrak{E}, \mathbf{P})$ beweise man die *Ungleichung von Kounias*

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \;\leq\; \min_{k\in\{1,\ldots,n\}} \left\{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) \;-\; \sum_{i:i\neq k} \mathbf{P}(A_i \cap A_k)\right\}\ .$$

24) Auf $\Omega = \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{A} = 2^\Omega$ sei für festes $n, N, M \in \mathbb{N}$ und $n \leq N, M \leq N$

$$p_k \; := \; \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \; .$$

(k ist die Anzahl aus M von gesamt N Elementen bei n Ziehungen ohne Zurücklegen.)

$$\mathbf{P}(A) := \sum_{k \in A} p_k \quad \text{für } A \subset \mathbb{N}.$$

a) Man zeige, dass **P** ein Wahrscheinlichkeitsmaß festlegt, also

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k} \; = \; \binom{N}{n}$$

gilt. *Hypergeometrische Verteilung* $H_{M,N,n}$.

b) Es gilt die *Symmetrie* $H_{M,N,n} = H_{n,N,M}$ für dieses Wahrscheinlichkeitsmaß.

c) Man gebe eine Rekursionsformel (also bestimme c_k) für die Wahrscheinlichkeiten an, $p_{k+1} \; = \; c_k p_k$.