MASS- & WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE I

http://www.statistik.tuwien.ac.at/lv-guide SS 2014

ÜBUNGSBLATT 4

25) Im Messraum $(\Omega, \mathfrak{A})$ gelte $\{\omega\} \in \mathfrak{A}$ für alle Punkte $\omega \in \Omega$. Ein Maß μ heißt *diffus* (oder auch *atomfrei*), wenn $\mu(\{\omega\}) = 0$ für alle $\omega \in \Omega$. Für eine nichtnegative Folge $\alpha_k \geq 0$ und dem Dirac-Maß δ_ω in $\omega \in \Omega$ sei

$$\delta \;:=\; \sum_{i \geq 1} \alpha_i \; \delta_{\omega_i} \tag{25-1}$$

a) Man zeige, dass durch (25-1) ein Maß definiert ist.

b) Jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ auf $(\Omega, \mathfrak{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ kann durch zwei Maße μ und δ in

$$\mathbf{P} \;=\; \mu \;+\; \delta$$

zerlegt werden, wobei μ diffus ist und δ die Gestalt (25-1) hat.

26) Auf $\{1, 2, \ldots, n\}$ bezeichne π eine zufällig gewählte Permutation. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass diese Permutation fixpunktfrei ist, also

$$\mathbf{P}[\pi(i) \neq i, \;\; i = 1, \ldots, n].$$

Wie verhält sich diese Wahrscheinlichkeit, wenn die Anzahl der Objekte $n \to \infty$?

Hinweis: Man betrachte $\bigcup_i A_i$, wobei $A_i := [\pi(i) = i]$, und wende das Additionstheorem an.

27) Ein Alternativversuch, bei dem 1 mit Wahrscheinlichkeit $0 < p < 1$ auftritt, wird immer wieder unabhängig durchgeführt. A_n ist das Ereignis, dass zwischen dem $2^n + 1$-ten und dem 2^{n+1}-ten Versuch mindestens eine Serie von n aufeinanderfolgenden Einsen auftritt. Man beweise:

a) $p < \frac{1}{2} \Rightarrow P(\limsup_n A_n) = 0$

b) $p \geq \frac{1}{2} \Rightarrow P(\limsup_n A_n) = 1$

Hinweis: Zu Punkt b) :Man berücksichtige die Wahrscheinlichkeit, dass keiner der $\lfloor \frac{2^n}{n} \rfloor$ aufeinanderfolgenden Blöcke der Länge n, die zwischen $2^n + 1$ und 2^{n+1} liegen, aus lauter Einsen besteht. Außerdem gilt

$$\mathrm{e}^{-x} \leq 1 - \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) x \qquad \forall\, 0 \leq x \leq 1 \,.$$

28) Man zeige, dass für jedes äußere Maß μ^* auf Ω und alle $A, B \in \mathfrak{P}(\Omega)$ gilt

$$\max\{\mu^*(A), \mu^*(B)\} < \infty \;\Rightarrow\; |\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \Delta B).$$

29) $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ sei ein Maßraum. Die Mengenfunktion $\mu^\star$ ist durch

$$\mu^\star(A) := \;\inf\{\mu(B) : B \supseteq A; \;\; B \in \mathfrak{A}\}$$

für alle $A \subseteq \Omega$ erklärt. Dann ist $\mu^\star$ ein äußeres Maß auf 2^Ω, das auf $\mathfrak{A}$ mit μ übereinstimmt.

30) Welche der folgenden Mengenfunktionen auf $\mathbf{2}^\Omega$ sind äußere Maße?

a)

$$\mu^\star(A) := \begin{cases} 0 & \text{falls } A = \emptyset \ , \\ 1 & \text{falls } A \neq \emptyset; \end{cases}$$

b)

$$\mu^\star(A) := \begin{cases} 0 & \text{falls } |A| \leq \aleph_0 \ , \\ \infty & \text{falls } A > \aleph_0 \ ; \end{cases}$$

c) Es sei $\Omega := \mathbb{R}^d$

$$\mu^\star(A) := \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ beschränkt } , \\ 1 & \text{falls } A \text{ nicht beschränkt}; \end{cases}$$

d) Ω sei unendlich,

$$\mu^\star(A) := \begin{cases} \frac{n}{n+1} & \text{falls } |A| = n \ , \\ 1 & \text{falls } |A| = \infty \ . \end{cases}$$

Bestimmen Sie für alle äußeren Maße die $\mu^\star$-meßbaren Mengen in $\mathfrak{M}_{\mu^\star}$.

31) Man zeige, dass für 2 Maße μ und ν auf einem Semiring $\mathfrak{T}$ über Ω gilt

a) $(\mu + \nu)^* = \mu^* + \nu^*$

b) $\mathfrak{M}_{(\mu+\nu)^*} \supseteq \mathfrak{M}_{\mu^*} \cap \mathfrak{M}_{\nu^*}$

c) Wenn μ, ν σ-endlich $\Rightarrow$ $\mathfrak{M}_{(\mu+\nu)^*} = \mathfrak{M}_{\mu^*} \cap \mathfrak{M}_{\nu^*}$

d) Im Allgemeinen gilt in b) keine Gleichheit.