ÜBUNGSBLATT 5

32) Ist $\emptyset \in \mathfrak{C}$ ein beliebiges Mengensystem und $f : \mathfrak{C} \to \mathbb{R}^+$ eine Funktion mit $f(\emptyset) = 0$, so ist

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_n f(C_n) : \ A \subseteq \bigcup_n C_n, \ C_n \in \mathfrak{C} \ \forall \, n \in \mathbb{N} \right\}$$

eine äußere Maßfunktion.

33) Der Merkmalsraum Ω sei abzählbar mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$. Dann existiert keine Folge A_i stochastisch unabhängiger Ereignisse mit $\mathbf{P}(A_i) = p$ für alle i, wobei $0 < p < 1$.

34) Vergleichssatz. Die σ-Algebra $\mathfrak{A}$ werde vom Semiring $\mathfrak{H}$ erzeugt, $\mathfrak{A} = \sigma(\mathfrak{H})$. Die Maße μ und ν auf $\mathfrak{A}$ sind σ-endlich und Ω ist aus $\mathfrak{H}$ für beide Maße endlich erreichbar.

μ und ν erfüllen auf $\mathfrak{H}$ die Ungleichung

$$\nu(E) \ \leq \ \mu(E) \qquad \forall E \in \mathfrak{H}.$$

Dann gilt diese Ungleichung auf der σ-Algebra, es ist also

$$\nu(A) \ \leq \ \mu(A) \qquad \forall A \in \mathfrak{A}.$$

Hinweis: Man argumentiere für $\tau := \mu - \nu$ mit dem Fortsetzungssatz und zeige, dass das Mengensystem

$$\mathfrak{D} \ = \ \{A \in \mathfrak{A} \mid \tau(A) \ = \ \mu(A) - \nu(A)\}$$

ein Dynkin-System ist.

35) Die Verteilung der Blutgruppen in der Bevölkerung werde folgendermaßen angenommen:
A: 40 % B: 20 % AB: 5 % 0: 35 %
Übertragungsmöglichkeit besteht innerhalb derselben Blutgruppe und auch in folgenden Richtungen:
$A \to AB$, $B \to AB$, $0 \to A$, $0 \to B$, $0 \to AB$
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine zufällig vorbeikommende Person einem Unfallopfer Blut spenden kann? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Blutgruppe des Opfers bzw. des Spenders B war, wenn die Übertragung möglich war?

36) Für die Lottoziehung '6 aus 45' berechne man:

- **a)** die Wahrscheinlichkeiten für die Gewinnränge (3 bzw. 4,5,6 richtige Zahlen und 5 richtige mit Zusatzzahl);
- **b)** die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Ziehung die maximale gezogene Zahl gerade i ($i = 6, \ldots, 45$) ist.

Hinweis: ad b): Man bestimme die Wahrscheinlichkeit von $B_i := \{\{x_1, \ldots, x_6\} \subseteq \{1, \ldots, 45\} : \max_{1 \leq j \leq 6} x_j \leq i\}$ und verwende die Subtraktivität von Wahrscheinlichkeiten.

37) Auf dem Messraum $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ ist durch $\mathbf{P}(\{k\}) = \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß (*Poissonverteilung* mit Rate $\theta > 0$) gegeben. Man bestimme

a) $k \in \mathbb{N}$ mit maximaler Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(\{k\})$ (*Modalwert*);

b) $\mathbf{P}(G)$ für die geraden Zahlen $G = 2\mathbb{N}$.

HINWEIS: ad a): Für welche $k \in \mathbb{N}$ gilt $\mathbf{P}(\{k-1\}) \leq \mathbf{P}(\{k\})$? ad b): Welche Reihenentwicklung hat $\cosh(x)$?

38) Man zeige, dass für jede monoton steigende Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (also auch für Verteilungsfunktionen) gilt:

a) für alle $x \in \mathbb{R}$ existieren $F_-(x)\,,\ F_+(x)$ mit $F_-(x) \leq F(x) \leq F_+(x)\,,$

b) für $x < y$ gilt $F_+(x) \leq F_-(y)\,,$

c) für die Unstetigkeiten $D := \{x :\ F_-(x) \neq F_+(x)\}$ gilt $|D| \leq \aleph_0\,,$

d) für $y < z$ gilt $\sum\limits_{x \in D \cap (y,z)} [F_+(x) - F_-(x)] \leq F(z) - F(y)\,.$