ÜBUNGSBLATT 6

39) Für eine reelle Folge $x_i, i \in \mathbb{N}$ betrachte man auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{L})$ das Maß (vgl. Beispiel 25)

$$\delta := \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{x_i} \tag{39-1}$$

für die Diskussion von:

a) Ist ein solches Maß der Gestalt (39-1) im allgemeinen σ-endlich ?

b) Kann jedes σ-endliche Maß als Lebesgue-Stieltes-Maß dargestellt werden?

c) Unter welchen Bedingungen ist (39-1) ein Lebesgue-Stieltes-Maß mit Verteilungsfunktion F_δ ?

40) Stellen Sie die Verteilungsfunktion F mit

$$F(x) = 0.\mathbb{1}_{(-\infty,0)}(x) + \frac{x}{2}.\mathbb{1}_{[0,1)}(x) + \frac{3}{4}.\mathbb{1}_{[1,2)}(x) + \frac{x+1}{4}.\mathbb{1}_{[2,3)}(x) + 1.\mathbb{1}_{[3,\infty)}(x)$$

dar als Mischung einer diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung P_d mit einer Verteilung P_s mit stetiger Verteilungsfunktion.

Außerdem berechne man die Wahrscheinlichkeiten $P((-\infty, 1))$, $P_s(\{1\})$, $P((2,\infty))$, $P_d((1, \infty))$.

41) Man zeige, dass

$$F(x_1, \ldots, x_m) := \min(x_1, \ldots, x_m)$$

eine Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}^m$ ist.

HINWEIS: Angenommen, es gilt o.E.d.A. $a_m = \max(a_1, \ldots, a_m)$, dann gilt für alle x_j und $a_i \le b_i$:

$$\begin{aligned} & \min(x_1^{i-1}, a_i, x_{i+1}^{m-1}) \\ = \; & \min(x_1^{i-1}, a_i, x_{i+1}^{m-1}, a_m) \\ = \; & \min(x_1^{i-1}, a_i, x_{i+1}^{m-1}, b_m) \end{aligned}$$

mit $x_i^k := (x_i, \ldots, x_k)$, $\quad i \le k$. Damit sollte man die Aussage aus der expliziten Gestalt von F folgern können.

42) Für messbare Funktionen $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{S})$ sind $[f \le g], [f < g]$ und $[f = g]$ messbare Mengen in $\mathfrak{S}$.

43) Eine stetige Zufallsvariable ξ mit Werten in $[0, \infty)$ besitze die Dichte $f(x) = ax^2e^{-kx}$ für $0 \le x \le \infty$ und $k > 0$. Man berechne den Koeffizienten a, die Verteilungsfunktion F und die Wahrscheinlichkeit für das Intervall $(0, \frac{1}{k})$.

44) Man zeige, dass eine Funktion $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ mit höchstens abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen Borel-messbar ist.

HINWEIS: f eingeschränkt auf die Stetigkeitspunkte ist stetig.

45) Man zeige, dass für eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen X_n auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P})$ und alle $x \in \mathbb{R}$ für die *Cesàro-Mittel* gilt

$$\mathbf{P}\left(\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = x\right) = 0 \quad \text{oder} \quad \mathbf{P}\left(\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = x\right) = 1 \,.$$