ÜBUNGSBLATT 7

46) Für eine (Borel)-messbare Funktion $f \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathfrak{S}), f : \Omega \to [0, \infty]$ existiert eine Darstellung der Form

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \mathbb{1}_{A_k}$$

für eine $\mathfrak{S}$-messbare Folge A_k.

HINWEIS: Man betrachte die Mengen $A_1 := [f \geq 1]$ und für $k \geq 2$

$$A_k := \left[f \geq \frac{1}{k} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i} \mathbb{1}_{A_i} \right].$$

47) Man zeige für eine reellwertige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) Wenn f differenzierbar ist, sind f und $\frac{df}{dx}$ (Borel)-messbar.

b) f ist messbar, wenn f *konvex* ist, d.h. für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \quad \text{wenn} \quad \alpha \in [0, 1].$$

48) Gegeben sei der Maßraum $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \lambda)$. Bestimmen Sie für folgende Funktionen f, g die erzeugten σ-Algebren $\sigma(f), \sigma(g)$,

$$f(x) := |x| \qquad\qquad g(x) := \cos x.$$

Ist f bezüglich $\sigma(g)$ messbar oder umgekehrt? Welche Funktionen sind $\sigma(f)$ messbar?

49) Die Punktwahrscheinlichkeit der Poissonverteilung auf $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ sei $p_k(\theta)$ (siehe Beispiel 37). Man stelle die Verteilungsfunktion $F(k)$ der Poissonverteilung für $k \in \mathbb{N}$ in der folgenden Form dar:

$$F(k) = 1 - \int_0^{\theta} p_k(x)\, dx$$

50) Im Messraum $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ seien die Ereignisse G die geraden Zahlen, P die Primzahlen und F die Fibonacci-Zahlen. Die stochastischen Größen X_1 und X_2 sind folgendermaßen gegeben:

$$X_1 = 2\, \mathbb{1}_G + 5\, \mathbb{1}_P + 10\, \mathbb{1}_F \qquad\qquad X_2 = \mathbb{1}_G + \mathbb{1}_P + \mathbb{1}_F$$

Man beschreibe die von beiden stochastischen Größen erzeugten σ-Algebren, $\sigma(X_1)$ bzw. $\sigma(X_2)$ und zeige $\sigma(X_2) \subset \sigma(X_1)$. Existiert eine (messbare) Abbildung H mit $X_2 = H(X_1)$?

51) Die Verteilung der Zufallsvariable $X > 0$ besitze die *Gedächtnislosigkeit*, d.h. es gilt

$$\mathbf{P}[X > s + t | X > t] = \mathbf{P}[X > s] \qquad \text{für } s, t \in \mathbb{R}^+$$

Welche Gestalt hat dann die Verteilungsfunktion von X? Man unterscheide stetige Verteilungsfunktionen auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{L})$ und diskrete Verteilungen auf $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$.

HINWEIS: Für die Zuverlässigkeitsfunktion $\bar{F} = 1 - F$ folgere man aus der Bedingung $\bar{F}(s + t) = \bar{F}(t).\bar{F}(s)$. Diese Funktionalgleichung löse man (für stetiges und diskretes F).

Die entstehenden Verteilungen entsprechen der Exponentialverteilung bzw. der geometrischen Verteilung.

52) Setzt man die Cantor-Funktion F_C definiert durch $F_C(x) := \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{x_i/2}{2^i}$ für $x \in C$, der Cantor-Menge, d.h. $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i},\ x_i \in \{0,2\} \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$ fort auf $\mathbb{R}$ durch $F(y) := \max\{0, \sup\limits_{x \in C \cap (-\infty, y]} F_C(x)\}$, so zeige man

- **a)** F ist monoton wachsend.
- **b)** $F(C) = [0,1]$.
- **c)** F ist stetig.
- **d)** F ist auf C^c differenzierbar mit $F'(x) = 0$.
- **e)** Für das zu F gehörige Maß μ_F gilt $\mu_F(C) = 1 \wedge \mu_F(C^c) = 0$.