MASS- & WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE I

http://www.statistik.tuwien.ac.at/lv-guide SS 2014

ÜBUNGSBLATT 8

53) In welchem Sinn konvergieren die untenstehenden Funktionenfolgen auf $([0,1], \mathfrak{B} \cap [0,1], \lambda)$

- **a)** $X_n(\omega) = \omega^n$
- **b)** $X_n(\omega) = \mathbf{1}_{\mathbb{N}}(n\,\omega)$
- **c)** $X_n(\omega) = \mathbb{1}_{[\sqrt{n}-\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \sqrt{n+1}-\lfloor\sqrt{n}\rfloor]}(\omega)$?

54) Man zeige, dass für jede Folge (X_n) von Zufallsvariablen auf $(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}), P)$ mit $P(A) := \sum\limits_{n\in A} 2^{-n}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- **a)** die X_n konvergieren punktweise,
- **b)** die X_n konvergieren P-fs,
- **c)** die X_n konvergieren in Wahrscheinlichkeit,
- **d)** die X_n konvergieren fast gleichmäßig.

55) Man zeige, dass für eine unabhängige Folge von Zufallsvariablen X_n mit $P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \frac{1}{2n\,\log n}$, $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n \log n}$ für $n \geq 2$ gilt: $X_n \to 0$ in Wahrscheinlichkeit, aber $X_n \not\to 0$ fs.

56) Für eine Folge $f, f_n \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A})$ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ gelte

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(|f_n - f| > \epsilon) \ < \ \infty$$

für beliebiges $\epsilon > 0$. Dann gilt $f_n \to f$ μ-fast überall. Man zeige diese Behauptung und belege, dass die Umkehrung im allgemeinen nicht gilt.

57) Die stochastische Folge $X_n \xrightarrow{P} X$ konvergiere in der Wahrscheinlichkeit. Wenn $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist, dann gilt auch $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$.

58) Die nichtnegative Größe $X \geq 0$ habe eine Verteilung mit Dichte f und Verteilungsfunktion $F(.)$. Dann ist $H(x) := -\log(1 - F(x))$ die *Hazardfunktion* und

$$r(x) \ = \ \lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} \mathbf{P}[X \leq x + h | X > x] \qquad \text{für } x > 0$$

die *Hazard-* oder *Ausfallrate*. Man begründe $H'(x) \ = \ r(x)$ und gebe konkrete Verteilungen an, die monoton wachsende, fallende bzw. konstante Ausfallraten haben.

Hinweis: Man betrachte Weibull-Verteilungen.

59) Man bestimme zu $T : \ ([0,1]^2, \mathfrak{B}^2) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, gegeben durch $T(\,(x_1, x_2)\,) := x_1 - x_2$ die Verteilungsfunktion und Dichte des induzierten Maßes $\lambda_2 T^{-1}$ und berechne $\lambda_2 T^{-1}(\,[-a, a])$.