MASS- & WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE I

http://www.statistik.tuwien.ac.at/lv-guide SS 2014

ÜBUNGSBLATT 9

60) Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte, stetige Zufallsvariable mit der Dichte f und der Verteilungsfunktion F. Sei weiters $X_{(n)} := \max\{X_1, \dots, X_n\}$ und $X_{(1)} := \min\{X_1, \dots, X_n\}$.

- **a)** Man bestimme die Dichte und die Verteilungsfunktion von $X_{(1)}$ und $X_{(n)}$.
- **b)** Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilungfunktion von $(X_{(1)}, X_{(n)})$.
- **c)** Sind $X_{(1)}$ und $X_{(n)}$ unabhängig?
- **d)** Für 2 unabhängige, auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariable X_1, X_2 bestimme man $\mathfrak{S}(X_{(1)}, X_{(2)})$ und die durch $(X_{(1)}, X_{(2)})$ induzierte Verteilung.

61) Es sei (X_n) eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariabler, für die gilt $P(X_n = X_m) = 0 \quad \forall\, n \neq m\,,$.

Man zeige, dass die Ereignisse E_n einzelner Rekorde, also $E_n = [X_n > \max\limits_{1 \leq i < n} X_i\,]$ unabhängig sind. Damit soll bewiesen werden, dass mit Wahrscheinlichkeit 1 unendlich oft ein Rekordergebnis eintritt.

Hinweis: Da nur die Ränge der Zufallsvariablen X_i für $i = 1, \dots, n$ für Rekorde zu berücksichtigen sind, betrachte man zufällige Permutationen $\pi_1, \dots, \pi_n$ von $1, \dots, n$ und $E_n = \left[\pi_n > \max\limits_{1 \leq j < n} \pi_j\right]$.

62) Man zeige, dass eine Zufallsvariable X genau dann integrierbar ist, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| > n) < \infty$$

und, dass dann gilt:

$$\lim_{n \to \infty} nP(|X| > n) = 0$$

Hinweis: Stellen Sie $P(|X| \geq n)$ als Summe von Wahrscheinlichkeiten dar, vertauschen Sie die Summationsreihenfolge und interpretieren Sie das Ergebnis als Integral einer diskreten Zufallsvariablen.

63) Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$, dann gilt

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k).$$

und

$$\mathbb{E}X^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)\mathbb{P}(X \geq k).$$

64) Die messbare Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ auf dem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ist genau dann integrierbar bezüglich μ, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine integrierbare Funktion $g \geq 0$ existiert, sodass

$$\int_{|f| \geq g} |f|\, d\mu \;<\; \varepsilon.$$

65) Die Funktionen $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$ sind integrierbar bezüglich dem Maß μ. Ist dann $f + g$, bzw. das Produkt $f.g$ bzw. $\max(f, g)$ jedenfalls eine integrierbare Funktion?

66) NEGATIVE HYPERGEOMETRISCHE VERTEILUNG $NH(N, A, m)$ Vom Gesamtlos N sind A Elemente markiert. Die stochastische Größe X gibt die Anzahl der Ziehungen ohne Zurücklegen an, die notwendig sind, bis genau m markierte gezogen sind. Wie ist die Verteilung von X? Man gebe also die Punktwahrscheinlichkeit $\mathbf{P}[X = k]$ an. Weiters berechne man den Erwartungswert $\mathbb{E}X$ dieser Größe.