# MASS- & WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE I

http://www.statistik.tuwien.ac.at/lv-guide SS 2014

## ÜBUNGSBLATT 10

**67)** Das Maß $\mu$ des Maßraums $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ist genau dann $\sigma$-endlich, wenn eine $\mu$-integrierbare Funktion $g$ existiert, die $0 < g < \infty$ auf $\Omega$ erfüllt.

**68)** Auf dem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ist $f : \Omega \to [0, \infty)$ Borel-messbar. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\ [f \geq n\ ])\ \leq\ \int f\ d\mu\ \leq\ \sum_{n=0}^{\infty} \mu([f > n]).$$

Daraus ergibt sich die Darstellung des Integrals von $f$ als Riemann-Integral

$$\int f\ d\mu\ =\ \int_0^{\infty} \mu([f \geq t])\ dt$$

Hinweis: Man betrachte das Integral von Funktionen in $\mathbb{N}$, die ganzzahlige "Versionen" von $f$ sind, wie etwa $\lfloor f \rfloor$ und $\lceil f \rceil$ (Ab- oder Aufrunden). Damit sollen dann auch Untersummen (bzw. Obersummen) von $f$ erstellt werden.

**69)** Man zeige,dass eine auf $[0, 1]$ $\lambda$-fü stetige und beschränkte Funktion $f$ ( d.h. $f$ ist Riemann-integrierbar ) nicht Borel-messbar sein muss.

Hinweis: Die Cantor-Menge $C$ enthält (Vorlesung) eine Menge $A \notin \mathfrak{B}$ . Die Unstetigkeitsstellen von $\mathbb{1}_A$ sind genau die Randpunkte von $A$.

**70)** Man zeige $f(x) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})\ \Leftrightarrow\ g_a(x) := f(x + a) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ , $\forall a \in \mathbb{R}$. Weiters zeige man dass das Integral $\int f\, d\lambda$ genau dann existiert, wenn $\int g_a\, d\lambda$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ existiert und dass dann gilt $\int f\, d\lambda = \int g_a\, d\lambda$ .

**71)** $X$ sei eine reellwertige Stochastische Größe und $\varphi$ sei eine messbare Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass $\varphi \circ X \in \mathcal{L}(\mathbf{P})$ integrierbar ist. $F$ bezeichne die Verteilungsfunktion des Maßes $\mathbf{P}^X$ von $X$ und $F^{-1}$ sei die verallgemeinerte Inverse.
Man begründe folgende Darstellungen des Erwartungswerts:

**a)**

$$\mathbb{E}(\varphi(X))\ =\ \int_{(0,1)} \varphi(F^{-1}(t))\ d\lambda(t)$$

**b)** $\varphi \geq 0$ sei strikt monoton wachsend und linksstetig, dann gilt

$$\mathbb{E}(\varphi(X))\ =\ \int_0^{\infty} (1 - F(\varphi^{-1}(t)))\ dt,$$

wobei $\varphi^{-1}$ die verallgemeinerte Inverse von $\varphi$ bezeichnet.

**72)** Zur nichtnegativen Stochastischen Größe $X$ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ sei durch

$$\mathscr{L}(\alpha)\ :=\ \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\alpha X}]$$

die *Laplace-Transformierte* für $\alpha \in [0, \infty)$ definiert. Man zeige, dass $\mathscr{L}$ auf $(0, \infty)$ unendlich oft differenzierbar ist und

$$\mathscr{L}^{(k)}(\alpha) \;=\; \mathbb{E}[(-X)^k \mathrm{e}^{-\alpha X}].$$

Wie kann $\mathbb{E}X^k$ mit $\mathscr{L}$ bestimmt werden?

**73)** Zu den folgenden Stochastischen Größen $X$ mit Verteilung $F$ soll die Verteilung der transformierten Größe $Y = G(X)$ bestimmt werden.

**a)** $X \sim N(0,1)$ Normalverteilung $\quad Y = X^2$.

**b)** $X \sim C(0,1)$ Cauchyverteilung $\quad Y = \frac{1}{X}$

**c)** $X \sim Ex_\lambda$ Exponentialverteilung $\quad Y = \lfloor X \rfloor$ , ganzzahliger Anteil von $X$.