MASS- & WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE I

http://www.statistik.tuwien.ac.at/lv-guide SS 2014

ÜBUNGSBLATT 11

74) Für die Zufallsgröße $X \geq 0$ sei $\mathscr{L}_X(\alpha)$ die Laplace-Transformierte (siehe Beispiel 72). Man bestimme die Laplace-Transformierte,

a) wenn $X \sim B_{n,p}$ Binomial-Verteilung und berechne damit die Erwartung $\mathbb{E}(X)$,

b) genauso, wenn $X \sim G_p$ Geometrisch-verteilt ist ,

c) bzw. $X \sim P_\lambda$ Poisson-verteilt ist;

d) Laplace-Transformierte $\mathscr{L}_Y$ von $Y = aX + b,\ \ a, b \in \mathbb{R}^+$;

e) Laplace-Transformierte $\mathscr{L}_{S_n}$ von $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ für unabhängige Stochastischen Größen $X_i \geq 0$ mit Laplace-Transformierten $\mathscr{L}_{X_i}$

75) Die Funktion $f \in \mathfrak{L}_1(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ sei integrierbar. Man zeige, dass dann
i) $[f \neq 0]$ ist eine abzählbare Vereinigung von Mengen mit endlichem Maß,
ii) $\mu([f \neq 0]) < \infty$ gilt aber im Allgemeinen nicht,
iii)

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{[\,|f|<\frac{1}{n}\,]} |f|\, d\mu = 0\ .$$

76) Die Stochastischen Größen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig und identisch nach Ex_τ (Exponentialverteilung) verteilt. Durch Faltung bestimme man die Dichte von $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ und zeige für die Verteilungsfunktion

$$F_{S_n}(x) \;=\; 1 \;-\; \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\tau^i x^i}{i!} \mathrm{e}^{-\tau x}\ .$$

77) Es sei $B_k = \{x \in \mathbb{R}^k |\ \| x \| \leq 1\}$ die k-dimensionale Einheitskugel. Für das Lebesguemaß (Volumen) $\lambda^k(B_k) =: \mathcal{V}_k$ soll die Rekursion

$$\mathcal{V}_{k+2} \;=\; \frac{2\pi}{k+2}\, \mathcal{V}_k$$

gezeigt werden. Damit erhält man

$$\mathcal{V}_{2k} \;=\; \frac{(2\pi)^k}{\prod\limits_{i=1}^{k} (2\,i)} \quad \text{und} \quad \mathcal{V}_{2k-1} \;=\; \frac{2\,(2\,\pi)^{k-1}}{\prod\limits_{i=1}^{k} (2\,i-1)}\,.$$

Hinweis: Man betrachte Schnittmengen $(B_k)_{(x,y)}$ und berechne das Volumen mit dem Produktmaß. Das Volumen der k-dimensionalen Kugel mit Radius r ist dann $r^k \mathcal{V}_k$.

78) Aus dem Satz von Fubini ergeben sich für reelle Folgen (a_i) bzw $(a_{i,j})$, $i, j \in \mathbb{N}$ die folgenden Reihensätze.

a) Doppelreihensatz Wenn eine der Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}$, $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j}$ bzw. $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{i,j}$ absolut konvergent ist, sind es auch die beiden anderen und die Summen sind gleich.

b) Umordnung von Reihen Bilden die Indexmengen $I_j \subset \mathbb{N}$ eine (endliche oder abzählbare) Zerlegung von $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} = \biguplus_j I_j$, dann gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \;=\; \sum_j \sum_{i \in I_j} a_i \;,$$

wenn auf einer Seite die Reihe absolut konvergent ist.

79) Es sei $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i) = ([0,1], \mathfrak{B}|_{[0,1]})$ für $i = 1, 2$. ζ bezeichne das Zählmaß und λ das Lebesgue-Maß jeweils auf $[0,1]$. Auf $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2, \lambda \otimes \zeta)$ sei $D := \{(x,x) | 0 \leq x \leq 1\}$ und $f := \mathbb{1}_D$.

a) Man zeige, dass $D \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ und daher f messbar ist.

b) Es gilt

$$\int \int f_x(y)\ d\zeta(y)\ d\lambda(x) \;\neq\; \int \int f_y(x)\ d\lambda(x)\ d\zeta(y).$$

Man kläre den 'Widerspruch' zum Satz von Fubini.

80) Man zeige, dass für eine Verteilungsfunktion F einer Stochastischen Größe X in $\mathbb{R}$ gilt

$$\int F(x+c) - F(x)\ d\lambda(x) \;=\; c\,, \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}\,.$$