MASS- & WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE II

http://www.statistik.tuwien.ac.at/lv-guide WS 2014

ÜBUNGSBLATT 8

50) Für reellwertige Funktionen $f \in \mathcal{L}^1(\lambda^r)$ und $g \in \mathcal{L}^p(\lambda^r)$ mit $1 \leq p < \infty$ und dem r-dimensionalen Lebesgue-Maß λ^r sei durch $h := f * g$ die (Funktionen)-Faltung erklärt. Man zeige, dass $h \in \mathcal{L}^p(\lambda^r)$ und die *Young-Ungleichung*

$$||f * g||_p \;\leq\; ||f||_1 \,.\, ||g||_p \;.$$

Hinweis: Man betrachte zunächst $f \geq 0, g \geq 0$ und kann dann $\frac{f}{||f||_1}$ als Wahrscheinlichkeitsdichte bezüglich λ^r interpretieren.

51) Die Stochastischen Größen $X_i, i = 1, \ldots, n$ sind integrierbar und $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sei strikt wachsend, stetig und konvex. Es sollen positive Konstanten $c_i > 0$ und $c > 0$ existieren, sodass

$$\mathbb{E}[\psi\left(\frac{|X_i|}{c_i}\right)] \;\leq\; c \qquad i = 1,, \ldots, n.$$

Daraus folgt

$$\mathbb{E}[\max_{1\leq i\leq n} |X_i|] \;\leq\; \psi^{-1}(c.n) \;\max_{1\leq i\leq n} c_i.$$

52) Die Zufallsvariablen X_i sind normalverteilt $N(0, \sigma_i^2)$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[\max_{1\leq i\leq n} |X_i|] \;\leq\; \sqrt{6 \log n} \;\max_{1\leq i\leq n} \sigma_i.$$

Hinweis: Man wende das Ergebnis aus dem vorigen Beispiel auf $\psi(x) = \exp(x^2)$ an.

53) Für die Zufallsgröße $X \in \mathcal{L}^2$ zeige man

$$\mathbf{P}(X - \mathbb{E}(X) \geq c) \;\leq\; \frac{\mathrm{var}(X)}{c^2 + \mathrm{var}(X)} \qquad \text{für} \;\; c > 0 \;.$$

54) Wieder sei die Zufallsgröße $X \in \mathcal{L}^2$ und weiters $\mathbb{E}X > 0$, dann gilt auch

$$\mathbf{P}(X > \; c\,\mathbb{E}(X)) \;\geq\; (1-c)^2 \frac{(\mathbb{E}X)^2}{\mathbb{E}X^2} \qquad \text{für} \;\; 0 < c < 1 \;.$$

55) Es sei X eine Zufallsgröße, für die die Moment-erzeugende Funktion

$$\psi_X(s) \;=\; \mathbb{E}\;\exp(sX)$$

für $s > 0$ existiert. Es sollen folgende Ungleichungen für Abweichungswahrscheinlichkeiten gezeigt werden:

a)

$$\mathbf{P}[X \geq \; t] \;\leq\; \frac{\mathbb{E}(X^+)}{t} \qquad t > 0$$

b) CHERNOFF-SCHRANKE

$$\mathbf{P}[X \geq t] \leq \inf_{s\geq 0} e^{-s.t}\psi_X(s)$$

56) Die Anzahl der 'Köpfe' von n Münzwürfen sei X, daher ist $X \sim B_{n,p}$ Binomialverteilt mit $p = 1/2$. Man berechne die Moment-erzeugende Funktion $\psi_X(s)$ und vergleiche die beiden Ungleichungen aus dem vorigen Beispiel, um die Wahrscheinlichkeit, dass bei $n = 100$ Würfen mindestens 80 mal 'Kopf' kommt, abzuschätzen.