1.Übung Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 2 WS2012

1. $(\Omega_i, \mathfrak{S}_i, \mathbb{P}_i)$, $i = 1, 2$ seien zwei sigmaendliche Maßräume, ν_1 und ν_2 zwei weitere (sigmaendliche) Maße mit $\nu_i \ll \mu_i$. Zeigen Sie , dass dann auch
$$\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$$
und
$$\frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)}(\omega_1, \omega_2) = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(\omega_1)\frac{d\nu_2}{d\mu_2}(\omega_2).$$

2. F und G seien zwei eindimensionale Verteilungsfunktionen. Zeigen Sie
$$\int_{(a,b]} G(x) d\mu_F(x) = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_{(a,b]} F(x-0) d\mu_G(x).$$
(Hinweis: $G(x) - G(a) = \int_{(a,b]} d\mu_G$)

3. Zeigen Sie für eine nichtnegative messbare Funktion f:
$$\int f\, d\mu = \int_0^\infty \mu([f > x])dx.$$
(schreiben Sie $f(x)$ als Integral).

4. X und Y seien unabhängige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_X und F_Y. Dann hat $X + Y$ die Verteilungsfunktion
$$F_{X+Y}(z) = \int F_Y(z - x) d\mu_{F_X}(x).$$

5. Im vorigen Beispiel seien F_X und F_Y absolutstetig mit Ableitung (Dichte) f_X und f_Y. Dann ist auch F_{X+Y} absolutstetig mit Dichte
$$f_{X+Y}(z) = \int f_X(x) f_Y(z - x)\lambda(dx).$$
(Die Faltung der beiden Dichten).

6. X und Y seien unabhängig normalverteilt mit Mittel 0 und Varianz σ_X^2 und σ_Y^2. Bestimmen Sie die Verteilung von $X + Y$.

7. $(\Omega_i, \mathfrak{S}_i, \mathbb{P}_i)$ seien zwei Wahrscheinlichkeitsräume, $A \in \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$, $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$ und $X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1$. Zeigen Sie
$$\mathbb{P}(A|X = x) = \mathbb{P}_2(A(x, .)).$$