2.Übung Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 2 WS2012

1. (a) Es sei $f : (\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}_2) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Zeigen Sie: $g : x \mapsto f(x, x)$ ist $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$-messbar.

   (b) Geben Sie ein Beispiel für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^2$, für die alle Schnitte $A(x, .)$ und $A(., y)$ messbar sind, aber nicht A selbst.

   (c) Zeigen Sie: wenn Ω_1 und Ω_2 höchstens abzählbar sind, dann ist $A \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$ genau dann $\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$-messbar, wenn alle Schnitte $A(x, .)$ und $A(., y)$ $\mathfrak{S}_2$- bzw. $\mathfrak{S}_1$-messbar sind.

2. Eine zweidimensionale Normalverteilung hat die Dichte

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}.$$

   Bestimmen Sie die Randverteilungen und die bedingte Verteilung von Y unter $X = x$.

3. Bestimmen Sie im vorigen Beispiel die Kovarianz von X und Y und zeigen Sie, dass X und Y genau dann unabhängig sind, wenn sie unkorreliert sind.

4. Die Gammaverteilung $\Gamma(\alpha, \lambda)$ ist hat die Dichte

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}[x > 0]$$

   (mit $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$). X und Y seien unabhängig $\Gamma(\alpha_1, \lambda)$- und $\Gamma(\alpha_2, \lambda)$-verteilt. Bestimmen Sie die Verteilung von $X + Y$.

5. Bestimmen Sie im vorigen Beispiel die Verteilung von $Z = X/(X + Y)$ (bestimmen sie zuerst die gemeinsame Verteilung von Z und $X + Y$).

6. X und Y seien unabhängig Poissonverteilt mit Parametern λ und μ.

   (a) Bestimmen Sie die Verteilung von $X + Y$.

   (b) Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von X unter $X + Y = n$.

7. X, Y, und Z seien unabhängig $U(0, 1)$-verteilt. Bestimmen Sie die Verteilung von $X + Y$ und $X + Y + Z$.